

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Claude GIGNOUX

SUJET

Méthodes de résolution des équations de Faddeev.

Soutenue le 12 Février 1972, devant la Commission d'examen

JURY

MM. J. VALENTIN

Président

B. MALGRANGE

J. YOCCOZ

J. RAYNAL

} *Examineurs*

Invité

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Claude GIGNOUX

SUJET

Méthodes de résolution des équations de Faddeev.

Soutenue le 12 Février 1972, devant la Commission d'examen

JURY

MM. J. VALENTIN

Président

B. MALGRANGE

J. YOCCOZ

} *Examineurs*

J. RAYNAL

Invité



Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies Infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSENEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphillographie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures

MM.	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mie	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique Industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique Industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533909_0036

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mie	AGNIUS-DELOD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Eile	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liene	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale

MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT 72)
	BRUGEL Lucien	Ennéstique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Daniel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique Atomique
	LE JENTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies Infectieuses
	MOREAU René	Hydrologie (EFP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHÉLIP Xavier	Rhumatologie
Mme	PIÉRY Yvette	Biologie animale

MM.	RACHAÏL Michel	Médecine Interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT D)
	ROUSEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	SHAN Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine Interne
	VIROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectrité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Héliène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 16 Novembre 1971

R E S U M E

Cette thèse comprend deux parties.

La première partie donne un exemple d'application du formalisme à trois corps pour l'interprétation de problème plus compliqué : dans le cadre d'un modèle simple de réaction nucléaire les résultats "exacts" donnés par les équations de Faddeev sont comparés à ceux obtenus par des méthodes approximatives plus simples. Ainsi pour les réactions d'échange ou d'arrachement d'un nucléon il est montré que la classique approximation de Born entre ondes déformées est meilleure que les autres, mais peut donner des estimations très erronées.

Dans la deuxième partie une méthode de résolution des équations de Faddeev pour des potentiels réalistes est proposée. Ce problème est important pour accroître notre connaissance de l'interaction nucléon-nucléon hors de la couche d'énergie. Cette méthode, d'abord comparée aux précédentes, est utilisée pour calculer l'énergie de liaison du triton pour plusieurs potentiels.

I N T R O D U C T I O N

Depuis les travaux de Faddeev, le problème de trois corps en interaction a été formulé de telle manière que sa solution est devenue mathématiquement possible. Cependant elle nécessite des calculs extrêmement complexes et dans le cas général le problème de trois corps est, maintenant encore, insoluble. On utilise donc et on utilisera encore longtemps des méthodes approchées beaucoup plus simples et qui ont été obtenues à partir d'une certaine image physique du processus considéré. Les équations de Faddeev sont cependant très utiles, non pour être utilisées dans les problèmes où interviennent trois corps ou plus, c'est-à-dire tous les problèmes, mais plutôt pour fournir des résultats exacts dans des problèmes simples où leur solution est possible. Ces solutions exactes de problèmes simples sont très utiles.

La première utilisation est d'étudier la validité des méthodes approchées qui n'ont pas en général de justification mathématique, mais qui sont cependant très utilisées. Pour cela on peut se contenter d'un modèle simple possédant les caractéristiques essentielles du problème étudié et comparer la solution "exacte" obtenue par les équations de Faddeev aux solutions approchées.

Une deuxième utilisation est d'améliorer notre connaissance du problème fondamental de l'interaction nucléon-nucléon. Nous possédons actuellement plusieurs potentiels qui expliquent bien le comportement de deux nucléons libres. C'est-à-dire des potentiels équivalents sur la couche d'énergie. Le problème est de savoir si ces descriptions de l'interaction nous permettent de retrouver les résultats expérimentaux connus sur l'interaction de deux nucléons en présence d'un troisième. Ceci est possible avec les équations de Faddeev si l'on est capable de résoudre le

plus simple problème physique, à savoir le problème de trois nucléons sans interaction coulombienne, c'est-à-dire le triton et par extension la diffusion neutron-deuton.

Les deux premiers chapitres illustrent le premier point : Nous essayons d'estimer la validité des approximations utilisées dans l'interprétation des réactions directes. Le problème est important car on tire de nombreux renseignements quantitatifs de ces réactions sans connaître bien exactement la confiance que l'on peut leur accorder.

Dans les trois derniers chapitres une méthode de résolution des équations de Faddeev est proposée. Après avoir été comparée aux autres méthodes connues pour le problème de trois bosons en interaction, elle est généralisée au problème de particules avec spin et utilisée pour la recherche de l'état lié du triton. On peut alors étudier différentes interactions à deux corps en dehors de la couche d'énergie.

NOTATIONS ET ABBREVIATIONS

$\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ fonction de Dirac

$\hat{r}$ vecteur unitaire dirigé le long de $\vec{r}$

$W(f, g, a)$ Wronskien en $a = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \Big|_{x=a}$

$Y_e^m(\hat{r})$ notation abrégée pour $Y_e^m(\theta, \varphi)$
 θ et φ étant les angles d'Euler de $\hat{r}$

$|\tilde{\Psi}\rangle$ fonction renversée dans le temps de $|\Psi\rangle$

$y_{\ell k}^{\ell m}(\hat{r}, \hat{y}) = \sum_{m, \nu} \langle \ell m \ell \nu | L M \rangle Y_e^m(\hat{r}) Y_k^{\nu}(\hat{y})$

$y_{\ell s}^{\ell m}(\hat{r}) = \sum_{m_e, m_s} \langle \ell m_e s m_s | j m \rangle Y_e^{m_e}(\hat{r}) |X_{m_s}^j\rangle$

$|X_{m_s}^j\rangle$ fonction de spin

$y_{\ell s}^{\ell m_s}(\hat{r}) = \sum_{m_e, m_s} \langle \ell m_e s m_s | j m \rangle Y_e^{m_e}(\hat{r}) \langle X_{m_s}^j |$

$Q_\ell(x)$ fonction de Legendre de deuxième espèce

$$Q_\ell(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_\ell(u) du}{x-u}$$

$j_\ell(x)$ fonction de Bessel sphérique

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE I</u>	1
I.1 - <u>Equations de Faddeev et amplitudes de transitions</u>	2
I.1.1. Cinématique	2
I.1.2. Equations de Faddeev	6
I.1.3. Termes inhomogènes	9
I.1.4. Amplitudes de transitions	11
I.2 - <u>Interaction séparable</u>	12
I.3 - <u>Réductions des équations de Faddeev</u>	15
I.3.1. Simplification due au pot. séparable	15
I.3.2. Décompositions angulaires	18
I.3.3. Symétries éventuelles	19
I.4 - <u>Résolution des équations de Faddeev</u>	21
I.4.1. Singularités du noyau	21
I.4.2. Déformation du contour d'intégration	26
 <u>CHAPITRE II - TESTS DE LA D.W.T.A.</u>	 33
II.1 - <u>Approximation de Born pour des ondes déformées (D.W.B.A.)</u>	33
II.2 - <u>Approximation soudaine et D.W.T.A.</u>	35
II.3 - <u>Comparaison avec la solution exacte</u>	38
 <u>CHAPITRE III - EQUATIONS DE FADDEEV POUR DES POTENTIELS LOCAUX</u>	
<u>METHODES USUELLES</u>	43
III.1 - <u>Equations pour trois bosons en interaction</u>	44
III.1.1. Symétrie de la solution	44
III.1.2. Réduction angulaire	47
III.2 - <u>Résolution du problème de trois bosons</u>	48
III.2.1. Résolution directe de l'équation 17	48
III.2.2. Résolutions par des approximations guidées par le problème physique	52

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE IV - UNE METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE FADDEEV</u>	55
IV.1 - <u>Recherche de la solution d'ordre zéro</u>	57
IV.1.1. Les états de Kapur-Peierls	61
IV.1.2. La fonction de Green	64
IV.1.3. Détermination pratique	66
IV.1.4. Un autre développement	68
IV.1.5. Résolution des équations de Faddeev avec des fonctions de Green séparables	76
IV.1.6. Comparaison avec Kim et Osborn	77
IV.1.7. Comparaison entre les deux types de fonctions de Green	82
IV.1.8. Conclusion sur la solution d'ordre zéro	83
IV.2 - <u>Forme intégrro-différentielle des équations de Faddeev</u> . .	83
IV.2.1. Formulation générale	86
IV.2.2. Cas de trois bosons et caractéristiques de la méthode	88
IV.3 - <u>Résolution du système intégrro-différentiel</u>	88
IV.3.1. Méthode de relaxation	90
IV.3.2. Résultats et détails numériques	91
IV.3.3. Comparaison avec la méthode de Malfliet et Tjon .	92
<u>CHAPITRE V - ETUDE DU TRITON</u>	92
V.1 - <u>Symétrie de la fonction d'onde du triton</u>	92
V.2 - <u>Recherche de la solution d'ordre zéro</u>	95
V.2.1. Les états de Kapur-Peierls - Généralisation	96
V.2.2. Projection des équations de Faddeev sur les états de Kapur-Peierls	100
V.2.3. Hypothèses sur le triton	103
V.2.4. Cas du potentiel de Reid : détails pratiques	106
V.3 - <u>Etat lié du triton par solution du système intégrro-différentiel</u>	108
V.3.1. Dérivation des équations intégrro-différentielles . .	109
V.3.2. Etude du potentiel de couplage	112
<u>CONCLUSION</u>	112

CHAPITRE I

UN MODELE SIMPLE DE PROBLEME A TROIS CORPS :

L'INTERACTION SEPARABLE

Comme nous allons le rappeler, les interactions de type séparable rendent trivial la solution du problème à deux corps et réduisent considérablement la difficulté du problème à trois corps. Ceci a rendu possible depuis déjà un certain temps l'étude de nombreux mécanismes nucléaires que l'on peut schématiser par trois particules interagissant deux à deux comme les résonances de trois pions, la diffusion neutron-deuteron, l'état lié du triton ou du carbone, etc... Cependant le caractère peu réaliste de l'interaction séparable utilisée ne permet d'obtenir que des informations qualitatives sur chaque problème.

Ce même type d'interaction est utilisé ici dans un tout autre esprit : jusqu'à présent et probablement pour longtemps encore le problème à trois corps le plus général est trop compliqué à résoudre et on utilise un certain nombre de solutions approchées dont la validité n'a pas toujours été démontrée. Ces différents types d'approximations peuvent cependant être comparés à la solution exacte qu'il est possible d'obtenir par les travaux de Mitra (Mi 61) et de Faddeev (Fa 60) et ceci est relativement facile si les interactions sont de type séparable.

Les résultats de cette comparaison n'auront de sens que dans la mesure où le modèle simple conserve les caractéristiques du problème réel pour la solution duquel on utilise les approximations.

C'est cette démarche qui va être présentée dans les deux chapitres suivants pour l'étude des réactions nucléaires directes avec réarrangement du type échange ou transfert d'un nucléon et que l'on peut schématiser par un système de trois corps élémentaires. En effet, les renseignements quantitatifs obtenus par ces réactions sont importants alors que les approximations utilisées pour les obtenir n'ont pas de

justification théorique. En particulier l'approximation la plus utilisée (DWBA) donne une expression qui est le premier terme d'une série non convergente (Dodd et Greider). Une comparaison avec un modèle simple traité exactement a été proposée initialement par Mitra qui n'a pas cependant obtenu de résultats quantitatifs. Les calculs ont été effectués par Shanley et Aaron et par Reiner et Jaffee pour étudier la validité de la DWBA dans la description des réactions de transfert. Dans le deuxième chapitre nous étudions des approximations récentes (DWTA), (SA), etc... qui ont été proposées pour remplacer la DWBA. Mais d'abord nous rappelons dans le premier chapitre les équations de Faddeev sous leurs formes diverses et nous établissons leur lien avec les amplitudes de transition. Après l'introduction des potentiels séparables les équations de Faddeev sont ramenées à une forme simple, puis finalement résolues.

I.1 - EQUATIONS DE FADDEEV ET AMPLITUDES DE TRANSITIONS

Pour une interaction séparable Mitra (Mi62) a pu résoudre l'équation de Schrödinger d'un système de trois particules. Plus tard Amado (Am63) en introduisant des états de quasi-particules dérivait une formulation semblable à la précédente. Cependant c'est Faddeev (Fa60) qui donna la première et complètement rigoureuse dérivation des équations qui portent son nom. Plus tard, Lovelace (Lo64) en donna une adaptation simple et plus facilement utilisable pour des physiciens. Si pour le modèle simple que nous voulons résoudre il est plus facile d'utiliser la méthode de Mitra, nous aurons besoin dans les chapitres suivants des équations de Faddeev-Lovelace, et ce sont ces dernières qui vont être rappelées. Mais auparavant, il faut définir plus précisément le système étudié.

I.1.1 - Un peu de cinématique (conventions de Lovelace)

Les trois particules considérées sont notées indifféremment 1, 2, 3 ou i, j, k, elles ont pour masse m_1, m_j, m_k , pour impulsions $\vec{P}_1, \vec{P}_j, \vec{P}_k$ et positions $\vec{R}_1, \vec{R}_j, \vec{R}_k$. On définit alors $\vec{P}_i$ par :

$$^1 \quad \vec{P}_i = (m_k \vec{P}_j - m_j \vec{P}_k) / (2 m_j m_k (m_j + m_k))^{1/2}$$

ce vecteur est proportionnel à l'impulsion relative des particules j et k.

On peut voir alors en appendice A.1 que l'énergie cinétique des deux particules dans le système de leur centre de masse est p_1^2 . On définit de même pour la particule i et le couple (j, k) :

$$2 \quad \vec{q}_i = (m_i(\vec{P}_j + \vec{P}_k) - (m_j + m_k)\vec{P}_i) / (2m_i(m_j + m_k)(m_i + m_j + m_k))^{1/2}$$

Ainsi l'énergie cinétique totale du système dans le centre de masse des trois particules s'écrit :

$$3 \quad T = p_1^2 + q_1^2 = p_2^2 + q_2^2 = p_3^2 + q_3^2$$

Avec ces 6 vecteurs $\vec{p}_i$ et $\vec{q}_j$ que nous appellerons dans la suite moments relatifs les masses disparaissent des formules. Les impulsions des trois particules sont alors complètement définies dans le système de leur centre de masse par deux quelconques de ces six vecteurs, grâce aux relations 1 et 2. Nous aurons souvent besoin dans la suite de la transformation unitaire d'après 3 de $\vec{p}_j, \vec{q}_j$ en $\vec{p}_i, \vec{q}_i$

$$4 \quad \begin{bmatrix} \vec{p}_j \\ \vec{q}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ji} & \beta_{ji} \\ -\beta_{ji} & \alpha_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_i \\ \vec{q}_i \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_{ji}^2 + \beta_{ji}^2 &= 1 \\ \alpha_{ij} &= \alpha_{ji} \quad \beta_{ij} = -\beta_{ji} \end{aligned}$$

Les coefficients de cette transformation unitaire sont fonction des masses et sont donnés dans l'appendice A.1.

D'une manière analogue on définit les coordonnées relatives $\vec{x}_i$ et $\vec{y}_i$ par :

$$5 \quad \begin{cases} \vec{x}_i = (2m_j m_k / (k^2(m_j + m_k)))^{1/2} (\vec{R}_j - \vec{R}_k) \\ \vec{y}_i = (2m_i / (k^2(m_j + m_k)(m_i + m_j + m_k)))^{1/2} (m_j \vec{R}_j + m_k \vec{R}_k - (m_j + m_k)\vec{R}_i) \end{cases}$$

qui se transforment de la même manière que les impulsions (relation 4).

Si on introduit maintenant la quantification, $\vec{p}_i$ et $\vec{x}_i$ comme $\vec{q}_i$ et $\vec{y}_i$ deviennent des opérateurs conjugués et il est facile de vérifier les relations de commutations

$$6 \quad [x_i, p_i] = [y_i, q_i] = i$$

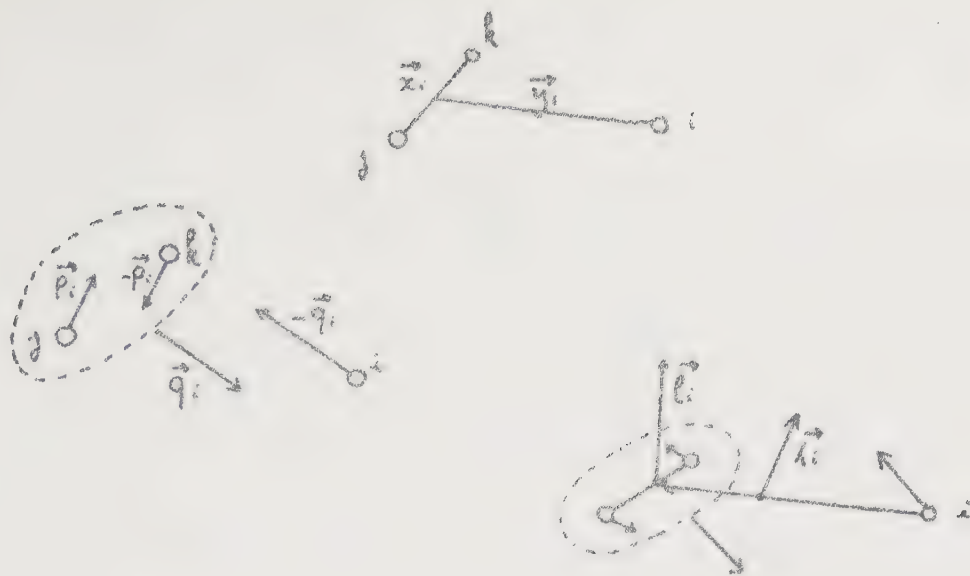


FIGURE 1 : Cinématique et notations.

On peut écrire l'opérateur moment cinétique $\vec{L}$ et l'opérateur énergie cinétique H_0 dans le centre de masse :

$$7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{L} = \vec{l} + \vec{K}_i = \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i + \vec{y}_i \wedge \vec{q}_i \\ H_0 = \Delta_{x_i} + \Delta_{y_i} = p_i^2 + q_i^2 \end{array} \right.$$

L'état $|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$ représente la situation de trois particules libres décrites chacune par des ondes planes d'impulsions $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ que l'on peut obtenir d'après les remarques précédentes à partir de $\vec{p}_i$ et $\vec{q}_i$ et $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0$. Ainsi l'état $|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$ décrit la même situation si les quatre vecteurs $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ sont reliés par la relation 4. Cette propriété sera utilisée très souvent dans la suite car certains opérateurs s'expriment plus facilement dans une représentation particulière.

La normalisation des ondes planes $|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$ est choisie de telle manière que l'on ait les relations :

$$8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{p}_i, \vec{q}_i | \vec{p}_i', \vec{q}_i' \rangle = \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i') \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_i') \\ 1 = \int d\vec{p}_i \int d\vec{q}_i | \vec{p}_i, \vec{q}_i \rangle \langle \vec{p}_i, \vec{q}_i | \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que la fonction d'onde s'écrit :

$$9 \quad \langle \vec{x}_i, \vec{y}_i | \vec{p}_i, \vec{q}_i \rangle = (2\pi)^{-3} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}_i + i\vec{q}_i \cdot \vec{y}_i}$$

L'état $|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$ de trois particules libres est état propre de l'opérateur énergie cinétique avec comme valeur propre $p_i^2 + q_i^2$, c'est-à-dire que l'on a :

$$H_0 |\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle = (p_i^2 + q_i^2) |\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$$

On en déduit immédiatement la représentation de l'opérateur énergie cinétique ainsi que celle de sa résolvante $G_0(E)$ dans l'espace d'impulsion

$$10 \quad \begin{cases} \langle \vec{p}'_i, \vec{q}'_i | H_0 | \vec{p}_i, \vec{q}_i \rangle = \delta(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) \delta(\vec{q}'_i - \vec{q}_i) (p_i^2 + q_i^2) \\ \langle \vec{p}'_i, \vec{q}'_i | G_0(E) | \vec{p}_i, \vec{q}_i \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) \delta(\vec{q}'_i - \vec{q}_i) (E + i\epsilon - p_i^2 - q_i^2)^{-1} \end{cases}$$

Dans l'espace des trois particules le potentiel entre les particules j et k s'écrit :

$$\langle \vec{p}_i, \vec{q}_i | V_i | \vec{p}_i, \vec{q}_i \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}'_i) \langle \vec{p}_i | V_i | \vec{p}_i \rangle$$

où la fonction de Dirac rappelle que l'interaction V_i n'agit que sur le mouvement relatif des particules j et k .

On définit alors les opérateurs G_i résolvante de l'hamiltonien de la voie i et T_i opérateur de transition entre les particules j et k en présence de la troisième par :

$$11 \quad \begin{cases} G_i(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E + i\epsilon - H_{0i} - V_i)^{-1} \\ T_i(E) = V_i + V_i G_i(E) V_i \end{cases}$$

et il est facile de voir que :

$$12 \quad T_i(E) = \int d\vec{q}_i |\vec{q}_i\rangle t_i(E - q_i^2) \langle \vec{q}_i|$$

où t_i est l'opérateur de transition habituel à deux corps évalué à l'énergie disponible pour ces deux particules, c'est-à-dire l'énergie totale du système moins l'énergie cinétique due au mouvement de la particule i . Les relations classiques pour l'opérateur de transition à deux corps se généralisent sans peine :

$$13 \quad \begin{cases} G_0(E) T_i(E) = G_i(E) V_i \\ T_i(E) G_0(E) = V_i G_i(E) \\ T_i(E) = V_i + V_i G_0(E) T_i(E) \end{cases}$$

I.1.2 - Les équations de Faddeev

Les équations de Faddeev donnent la possibilité théorique d'obtenir l'opérateur de transition des trois particules T défini par l'équation :

14
$$T(E) = (V_1 + V_2 + V_3) (1 + G_0(E) T(E))$$

Ces éléments de matrice $\langle \vec{p}', \vec{q}' | T(E) | \vec{p}, \vec{q} \rangle$ sont des fonctions des quatre impulsions et de l'énergie, soit donc de 15 variables. Sous leur forme habituelle les équations de Faddeev s'écrivent :

15
$$\begin{cases} T(E) = \hat{T}_1(E) + \hat{T}_2(E) + \hat{T}_3(E) \\ \hat{T}_i(E) = T_i(E) + T_i(E) G_0(E) (\hat{T}_j(E) + \hat{T}_k(E)) \end{cases}$$

16
$$V_i G(E) = \hat{T}_i(E) G_0(E)$$

où G(E) est la résolvante de l'hamiltonien complet :

$$G(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E + i\epsilon - H_0 - V_1 - V_2 - V_3)^{-1}$$

Ces équations 15 et 16 ont donc été proposées pour remplacer l'équation de Lippman Schwinger 14 qui peut se mettre sous la forme $(1 - K(E)) T(E) = V_1 + V_2 + V_3$ et dont le noyau K(E) contient des singularités du type fonction δ de Dirac qui rendent impossible sa solution.

En fait la connaissance de cet opérateur T(E) dans le cas général n'est pas utile ; il nous faut plutôt l'action de cet opérateur dans le cas particulier que nous étudions.

Nous considérons en effet la diffusion de particule (particule 3 par exemple) sur l'état fondamental du système (1,2) avec une impulsion relative $\vec{q}_{30}$.

Une telle situation est décrite par le vecteur :

17
$$\begin{cases} |\Phi_{30}\rangle = |\vec{q}_{30}\rangle \varphi_{30} \\ \langle \vec{x}_3 \vec{y}_3 | \Phi_{30} \rangle = e^{i \vec{q}_{30} \cdot \vec{y}_3} \varphi_{30}(\vec{x}_3) \cdot (2\pi)^{-3/2} \\ \langle \vec{p}_3 \vec{q}_3 | \Phi_{30} \rangle = \delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_{30}) \varphi_{30}(\vec{p}_3) \end{cases}$$

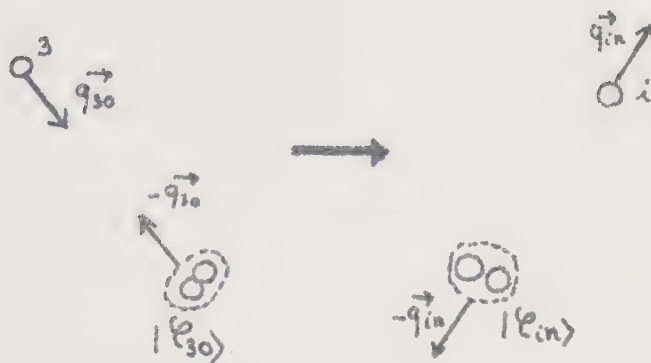


FIGURE 2 : Schéma des réactions étudiées.

L'énergie libre du système des trois particules est donnée par

$$18 \quad E = q_{30}^2 - E_{30}$$

E_{30} est l'énergie de liaison positive du système (1,2) dans l'état fondamental ($n=0$). Cet état initial est vecteur propre de l'hamiltonien de la voie 3, c'est-à-dire que l'on a :

$$19 \quad (E - H_0 - V_3) |\Phi_{30}\rangle = 0$$

Toutes les observables de notre problème sont obtenues à partir du vecteur $|\Psi\rangle$ qui satisfait la relation

$$20 \quad (E - H_0 - V_1 - V_2 - V_3) |\Psi\rangle \quad \text{et}$$

$$|\Psi\rangle = (1 + G(V_1 + V_2)) |\Phi_{30}\rangle$$

L'énergie E du problème étant fixée (relation 18), nous n'indiquerons pas la dépendance des grandeurs en fonction de cette énergie.

Après diffusion on a plusieurs situations possibles décrites asymptotiquement par les états $|\Phi_{in}\rangle$ où la particule i s'éloigne de l'état lié d'ordre n du système (jk) avec l'impulsion relative $\vec{q}_{in}$ (figure 2) et dont le module est donné par la conservation de l'énergie :

$$21 \quad E = q_{in}^2 - E_{in}$$

et de la même manière que pour l'état $|\Phi_{30}\rangle$ on a :

$$\begin{aligned} 22 \quad & |\Phi_{in}\rangle = |\vec{q}_{in}\rangle \zeta_{in} \\ & (E - H_0 - V_i) |\Phi_{in}\rangle = 0 \end{aligned}$$

L'amplitude de transition vers la voie i,n est donnée par l'élément de matrice classique qui ne dépend donc que de la direction de l'impulsion $\vec{q}_{in}$

$$23 \quad A_{in}(\hat{q}_{in}) = \langle \Phi_{in} | V_j + V_k | \Psi \rangle$$

Nous allons transformer les équations de Faddeev pour obtenir l'état $|\Psi\rangle$ plutôt que l'opérateur $T(E)$. Pour cela on considère les vecteurs $|\Psi_i\rangle$ définis par :

$$24 \quad |\Psi_i\rangle = G_0 V_i |\Psi\rangle$$

on peut alors écrire :

$$|\Psi_i\rangle = G_0 (V_i + V_i G(V_1 + V_2)) |\Phi_{30}\rangle$$

et on peut faire apparaître les grandeurs $\hat{T}_i$ par la relation 16

$$|\Psi_i\rangle = G_0 V_i |\Phi_{30}\rangle + G_0 \hat{T}_i G_0 (V_1 + V_2) |\Phi_{30}\rangle$$

On obtient des équations analogues à 15 en multipliant ce système à droite par $G_0 (V_1 + V_2) |\Phi_{30}\rangle$ et à gauche par G_0 on obtient :

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle - G_0 V_i |\Phi_{30}\rangle &= G_0 \hat{T}_i G_0 (V_1 + V_2) |\Phi_{30}\rangle + \\ &\dots G_0 \hat{T}_i (|\Psi_j\rangle + |\Psi_k\rangle - G_0 V_j |\Phi_{30}\rangle - G_0 V_k |\Phi_{30}\rangle) \end{aligned}$$

ou encore :

$$|\Psi_i\rangle = G_0 \hat{T}_i (|\Psi_j\rangle + |\Psi_k\rangle) + G_0 (V_i + \hat{T}_i G_0 (V_1 + V_2 - V_j - V_k)) |\Phi_{30}\rangle$$

Le dernier terme peut encore s'écrire : $G_0 (V_i + \hat{T}_i G_0 V_i - \hat{T}_i G_0 V_3) |\Phi_{30}\rangle$

ou en utilisant la relation 13 :

$$25 \quad |\Psi_i\rangle = G_0 \hat{T}_i (|\Psi_j\rangle + |\Psi_k\rangle) + G_0 \hat{T}_i (1 - G_0 V_3) |\Phi_{30}\rangle$$

On a donc un système d'équation analogue à 15 et qui présente le même noyau $G_0 \hat{T}_i$. Le vecteur $|\Psi\rangle$ peut être obtenu à partir des $|\Psi_i\rangle$; on

effet, d'après la définition 24 on a :

$$(E-H_0)(|\Psi\rangle + |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle) = (V_1 + V_2 + V_3)|\Psi\rangle$$

$|\Psi\rangle$ satisfait l'équation d'onde 20, c'est-à-dire que l'on a :

$$(E-H_0)(|\Psi\rangle - |\Psi_1\rangle - |\Psi_2\rangle - |\Psi_3\rangle) = 0$$

D'après les conditions initiales pour $|\Psi\rangle$ et d'après la définition 24 de $|\Psi_i\rangle$ aucun de ces vecteurs n'a de composante d'onde libre du type $|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle$ ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$26 \quad |\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle$$

On peut maintenant réduire les termes qui ne contiennent pas les inconnues $|\Psi_i\rangle$ dans l'équation 25.

1.1.3 - Etude des termes inhomogènes

On doit prendre beaucoup de précaution en étudiant les termes inhomogènes. Considérons en effet $(1-G_0 V_3)|\Phi_{30}\rangle$ d'après les relations 10, 17 on a :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_3, \vec{q}_3 | (1-G_0 V_3) | \Phi_{30} \rangle &= \delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_{30}) \mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3) - \delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_{30}) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \dots \\ &\dots (\epsilon + i\epsilon - p_3^2 - q_{30}^2)^{-1} \int d\vec{p}_3' \langle \vec{p}_3 | V_3 | \vec{p}_3' \rangle \mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3') \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3')$ obéit à l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire que l'on a dans l'espace d'impulsion :

$$-E_{30} \mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3) = p_3^2 \mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3) + \int d\vec{p}_3' \langle \vec{p}_3 | V_3 | \vec{p}_3' \rangle \mathcal{E}_{30}(\vec{p}_3')$$

ce qui permet d'écrire en utilisant la relation 18 :

$$27 \quad \begin{cases} \langle \vec{p}_3, \vec{q}_3 | (1-G_0 V_3) | \Phi_{30} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_{30}) \left(1 + \frac{E_{30} + p_3^2}{i\epsilon - p_3^2 - E_{30}} \right) \mathcal{E}_3(\vec{p}_3) \\ \langle \vec{p}_3, \vec{q}_3 | (1-G_0 V_3) | \Phi_{30} \rangle = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon \delta(\vec{q}_3 - \vec{q}_{30}) \mathcal{E}_3(\vec{p}_3)}{E_{30} + p_3^2} \end{cases}$$

ceci veut dire que l'on peut remplacer $G_0 V_3 |\Phi_{30}\rangle$ par $|\Phi_{30}\rangle$ ces

deux vecteurs présentant la même singularité de la fonction de Dirac, mais on ne peut remplacer $(1 - G_0 V_3) |\Phi_{30}\rangle$ par zéro et il en sera de même pour $(1 - G_0 V_1) |\Phi_{10}\rangle$.

Cependant si on évalue $G_0 T_1$ ou $2 (1 - G_0 V_3) \Phi_{30}$, les deux fonctions singulières de Dirac, dues respectivement à T_1 (ou T_2) (formule 12) et au dernier terme d'après la relation 27 vont disparaître dans l'intégration comme on peut le voir d'après 10 et 12 :

$$\int d\vec{p}'_1 \int d\vec{q}'_1 \langle \vec{p}_1, \vec{q}_1 | G_0 T_1 | \vec{p}_1, \vec{q}_1 \rangle = -i \delta(\vec{q}'_1 - \vec{q}_{10}) \mathcal{L}_1(\vec{p}'_1) (E_{10} + p'_1)^{-1} = \dots$$

$$\dots -i \delta(\vec{q}'_1 - \vec{q}_1) \langle \vec{p}_1 | t_1 (E - q_1) | \vec{p}'_1 \rangle d\vec{p}'_1 d\vec{q}'_1 \delta(\vec{q}'_1 - \vec{q}_{10}) \mathcal{L}_1(\vec{p}'_1) (E_{10} + p'_1)^{-1} (E - p_1 + q_1)^{-1}$$

En utilisant les relations 4 entre $\vec{p}'_1$, $\vec{q}'_1$, $\vec{p}_3$, $\vec{q}_3$ et en intégrant sur $d\vec{q}'_1$ et $d\vec{q}_3$ les fonctions singulières disparaissent et la limite de cette quantité est nulle.

Il n'en est pas de même pour $G_0 T_3 (1 - G_0 V_3) |\Phi_{30}\rangle$ que l'on peut évaluer rapidement en utilisant la relation 13

$$T_3 - T_3 G_0 V_3 = V_3$$

d'où :

$$G_0 T_3 (1 - G_0 V_3) |\Phi_{30}\rangle = G_0 V_3 |\Phi_{30}\rangle$$

et d'après ce qui a été dit précédemment on peut remplacer $G_0 V_3 |\Phi_{30}\rangle$ par $|\Phi_{30}\rangle$.

Finalement les équations 25 s'écrivent :

$$26 \quad \begin{cases} |\Psi_1\rangle = G_0 T_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_2\rangle = G_0 T_2 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_3\rangle = G_0 T_3 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) + |\Phi_{30}\rangle \\ |\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle \end{cases}$$

Ces équations ne sont pas encore sous une forme propre à leur résolution, en effet comme nous l'avons vu $|\Phi_{30}\rangle$ donne en représentation d'impulsion une fonction de Dirac. Il convient donc d'itérer une fois ces équations en posant :

$$27 \quad |\chi_i\rangle = G_0 T_i (|\Psi_j\rangle + |\Psi_k\rangle)$$

alors le système 26 devient :

$$|X_i\rangle = G_0 T_i (|X_j\rangle + |X_k\rangle + (1 - \delta_{ij}) |\Phi_{30}\rangle)$$

28

$$|\Psi\rangle = |X_i\rangle + |X_j\rangle + |X_k\rangle + |\Phi_{30}\rangle$$

et comme nous l'avons vu précédemment $G_0 T_i \neq 3 |\Phi_{30}\rangle$ ne contient plus de fonction δ (ceci est représenté dans la méthode des graphes par un graphe dit connecté ).

I.1.4 - Les amplitudes de transition

Les vecteurs $|X_i\rangle$ sont particulièrement bien adaptés au calcul des diverses amplitudes de transition. En effet $|X_i\rangle$ est la partie de la fonction d'onde $|\Psi\rangle$ qui décrit, par l'intermédiaire de $G_0 T_i$ (équivalent à $G_1 V_i$ 13), la possibilité de voir la particule i partir à l'infini, les particules j et k restant en interaction dans l'état lié $|\Phi_{in}\rangle$ - Ceci peut se voir en utilisant la relation 27 et la définition 24 des $|\Psi_i\rangle$:

$$|X_i\rangle = G_0 T_i (|\Psi_j\rangle + |\Psi_k\rangle) = G_0 T_i G_0 (V_j + V_k) |\Psi\rangle$$

d'après 13 $G_0 T_i G_0 = G_0 T_i G_1 = G_1 = G_0$. A l'aide de la décomposition spectrale de G_1 et de G_0 on obtient :

$$29 \quad \left\{ \begin{aligned} |X_i\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varphi_{in} \vec{q}_i\rangle \langle \varphi_{in} \vec{q}_i | V_j + V_k | \Psi\rangle}{E + E_{in} - q_i^2 + i\epsilon} + \dots \\ &\quad \int d\vec{p}_i \int d\vec{q}_i \frac{|\varphi_{pi} \vec{q}_i\rangle \langle \varphi_{pi} \vec{q}_i | V_j + V_k | \Psi\rangle}{E - p_i^2 - q_i^2 + i\epsilon} + \dots \\ &\quad - \int d\vec{p}_i \int d\vec{q}_i \frac{|\vec{p}_i \vec{q}_i\rangle \langle \vec{p}_i \vec{q}_i | V_j + V_k | \Psi\rangle}{E - p_i^2 - q_i^2 + i\epsilon} \end{aligned} \right.$$

$|\varphi_{pi} \vec{q}_i\rangle$ sont les états de diffusion des particules j et k à l'énergie p_i^2 , c'est-à-dire qu'ils ont comme partie entrante celle de l'onde plane $|\vec{p}_i\rangle$. Sur l'expression 29 on voit donc qu'en fonction de q_i la quantité $\langle \vec{q}_i | X_i \rangle$ a des pôles pour les valeurs telles que $q_i^2 = E + E_{ni}$ c'est-à-dire d'après 21 pour $q_i^2 = q_{in}^2$ ou encore pour l'impulsion finale dans la voie in. Les deux derniers termes, bien que s'annulant partiellement, donnent une coupure pour $q_i^2 = E - p_i^2$, p_i^2 allant de 0 à ∞ .

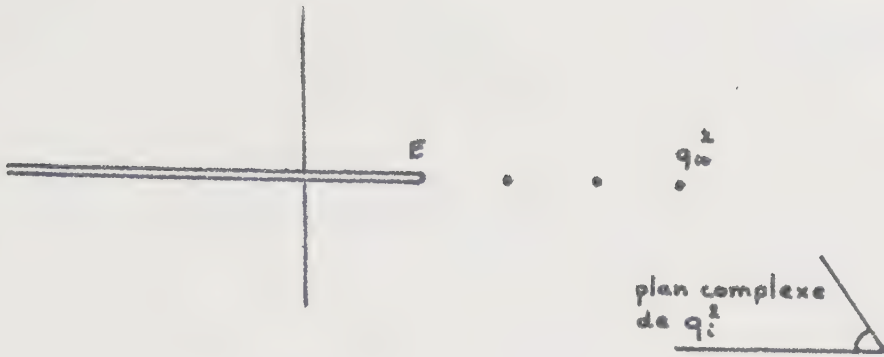


FIGURE 3 : Singularités de la quantité χ_1 en fonction de q_1^2 . Les pôles sont dus à l'existence d'états liés pour les sous-systèmes à deux corps. La coupure manifeste l'unitarité de la solution des équations de Faddeev.

Si on regarde maintenant le comportement de $\langle \vec{q}_1 | \chi_i \rangle$ au voisinage du pôle q_{in} on a :

$$\lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{in}} (q_{in}^2 - q_i^2) \langle \vec{q}_i | \chi_i \rangle = | \psi_{in} \rangle \langle \psi_{in} | V_j + V_k | \psi \rangle$$

expression dans laquelle on retrouve l'amplitude de transition vers la voie in 23 :

$$30 \quad A_{in}(\vec{q}_{in}) = \lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{in}} \frac{(q_{in}^2 - q_i^2) \langle \vec{p}_i, \vec{q}_i | \chi_i \rangle}{\psi_{in}(\vec{p}_i)} = \lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{in}} (q_{in}^2 - q_i^2) \langle \vec{q}_i | \psi_{in} | \chi_i \rangle$$

1.2 - L'INTERACTION SEPARABLE

L'interaction séparable a été proposée par Wigner et son expression la plus simple est :

$$31 \quad \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \lambda g(p) g(p')$$

Si on se rappelle que $\vec{p}$ est l'impulsion relative des deux particules on voit facilement que cette interaction est bien invariante par translation, qu'elle n'agit que dans l'état de moment orbital relatif $\ell = 0$ et qu'elle est invariante dans le renversement du sens du temps si $g(p)$ est réel.

Si on cherche la solution de l'équation de Lippman Schwinger pour deux particules interagissant par ce potentiel :

$$t(E) = V + V g_0(E) t(E)$$

où $g_0(E)$ est la résolvante de l'opérateur énergie cinétique, on voit maintenant d'après 31 que la solution est de la forme

$$\langle \vec{p} | t(E) | \vec{p}' \rangle = \lambda g(p) \tau(E) g(p')$$

où la fonction $\tau(E)$ satisfait l'équation :

$$\tau(E) = 1 + \lambda \tau(E) \int \frac{g(p)^2 d\vec{p}}{E - E_p - p^2} = 1 + \lambda \tau(E) \langle g | g_0(E) | g \rangle$$

ou encore :

$$32 \quad \tau(E) = (1 - \lambda \langle g | g_0(E) | g \rangle)^{-1}$$

La constante λ peut être choisie de façon que $\tau(E)$, c'est-à-dire $t(E)$ ait un pôle pour l'énergie $-E_b$, ce qui traduira l'existence d'un état lié. L'intégrale $\langle g | g_0(E) | g \rangle$ étant une fonction monotone de l'énergie, on ne peut donc obtenir avec la forme simple 31 qu'un seul pôle c'est-à-dire que ce potentiel ne peut permettre qu'un seul état lié.

L'expression 31 a donc été généralisée par de nombreux auteurs sous la forme :

$$33 \quad \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \sum_{l=0}^L \left\{ \sum_{n=1}^{N_l} \lambda_{ln} g_{en}(p) g_{en}(p') \right\} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{p}) Y_l^{m*}(\hat{p}')$$

Alors la résolution de l'équation de Lippman Schwinger se ramène à l'inversion d'une matrice pour chaque onde l et on peut montrer qu'il y a au plus N_l états liés dans chaque onde. On peut aussi faire intervenir les spins et on obtient des potentiels plus compliqués mais qui peuvent rendre compte des déphasages expérimentaux de la diffusion nucléon-nucléon.

La simplification qu'apportent de tels potentiels dans l'étude de la matière nucléaire ainsi que dans les modèles nucléaires et les problèmes à trois corps a entraîné l'apparition de nombreuses formes de potentiels et de nombreuses études sur le caractère particulier du

à leur extrême non localité. On peut trouver une compilation sur ce sujet dans la thèse de Kok (Ko69).

L'interaction que nous avons considérée dans la suite est celle de Yamaguchi (Ya54) sans force tensorielle :

$$34 \quad \begin{aligned} \langle \vec{p}_i | V_i | \vec{p}_i' \rangle &= -g_i(p_i) g_i(p_i') \\ g_i(p_i) &= C_i / (p_i^2 + \gamma_i^2) \end{aligned}$$

Cette forme permet de reproduire correctement le comportement à basse énergie de la diffusion nucléon-nucléon ainsi que les caractéristiques essentielles du deuton. Ceci est très important dans le problème à trois corps où l'énergie disponible pour deux des corps va de E , énergie totale, à $-\infty$ suivant l'énergie cinétique du troisième.

Nous avons choisi la même forme comme modèle de l'interaction nucléon-noyau. Ceci est une approximation très grossière et qui en fait limitera beaucoup les conclusions de cette étude. Pour l'interaction nucléon-nucléon les constantes C_i et γ_i sont données par Yamaguchi. Pour l'interaction nucléon-noyau elles ont été déterminées par l'énergie de liaison et par le rayon carré moyen de l'état lié. La relation entre ces différentes grandeurs est précisée en appendice A.2. Nous aurons cependant besoin, dans la suite, de certaines relations que nous allons dériver.

Nous aurons besoin en particulier de la fonction d'onde de l'état lié ($j k$). Celle-ci est obtenue en écrivant l'équation de Shrödinger dans l'espace d'impulsion avec l'expression 34 du potentiel :

$$35 \quad \mathcal{U}_i(\vec{p}_i) = g_i(p_i) \langle g_i | \mathcal{U}_i \rangle (E_i + p_i^2)^{-1}$$

Les potentiels considérés ne donnant qu'un état lié, l'indice n sera omis dans la suite.

On peut aussi écrire l'opérateur de transition :

$$36 \quad \langle \vec{p}_i | T_i(p_i) | \vec{p}_i' \rangle = -g_i(p_i) \mathcal{T}_i(E) g_i(p_i')$$

Nous aurons besoin du comportement de $\mathcal{T}_i$ au voisinage du pôle $-E_i$. Celui-ci peut s'obtenir à partir de la relation :

$$t(E) = V + V (E + i\varepsilon - H_0 - V)^{-1} V$$

en utilisant le comportement de la fonction de Green au voisinage de son pôle

$$t_i(E) = |q_i\rangle \tau_i(E) \langle q_i| \simeq |q_i\rangle \langle q_i| \psi_i \rangle (E + E_i)^{-1} \langle \psi_i | q_i \rangle \langle q_i|$$

$$37 \quad \tau_i(E) \simeq -|\langle q_i | \psi_i \rangle|^2 / (E + E_i)$$

Dans la suite nous allons voir comment l'emploi d'un tel potentiel séparable simplifie les équations de Faddeev. Nous pourrions utiliser le potentiel plus général du type 33, cependant les simplifications apparaîtraient avec moins de clarté, d'autre part une telle dérivation est plus académique qu'utile puisque ce potentiel n'a pas encore été utilisé dans les équations de Faddeev pour la diffusion.

1.3 - REDUCTION DES EQUATIONS DE FADDEEV

1.3.1 - Simplification due au potentiel de Yamaguchi

Dans les équations de Faddeev 28 il apparaît l'opérateur $G_0 T_1$. Cet opérateur a une représentation particulièrement simple dans l'espace des ondes planes $|\vec{p}; \vec{q}\rangle$. Ainsi on a, d'après 10, et l'expression de l'opérateur de transition 12 et 36 :

$$\langle \vec{p}; \vec{q} | G_0 T_1 | \vec{p}'; \vec{q}' \rangle = -\delta(\vec{q} - \vec{q}') g_i(p_i) \tau_i(E - q_i^2) g_i(p_i') (E - p_i^2 - q_i^2)^{-1}$$

le système 28 peut donc s'écrire dans l'espace d'impulsions :

$$38 \quad \langle \vec{p}; \vec{q} | X_i \rangle = Y_i(\vec{p}; \vec{q}) = g_i(p_i) \tau_i(E - q_i^2) (E + i\varepsilon - p_i^2 - q_i^2)^{-1} F_i(\vec{q})$$

avec

$$39 \quad \begin{cases} F_1(\vec{q}_1) = - \int d\vec{p}_1 g_1(p_1) \langle \vec{p}_1, \vec{q}_1 | X_2 + X_3 + \Phi_3 \rangle \\ F_2(\vec{q}_2) = - \int d\vec{p}_2 g_2(p_2) \langle \vec{p}_2, \vec{q}_2 | X_1 + X_3 + \Phi_3 \rangle \\ F_3(\vec{q}_3) = - \int d\vec{p}_3 g_3(p_3) \langle \vec{p}_3, \vec{q}_3 | X_1 + X_2 \rangle \end{cases}$$

On voit sur la relation 38 que le problème de la détermination de la fonction de deux vecteurs $\chi_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$ se ramène à la recherche d'une fonction de $\vec{q}_1$ seule, la dépendance en $\vec{p}_1$ étant entièrement exprimée. On peut obtenir un système d'équations couplées liant les F_1 en reportant la relation 38 dans le système 39. Pour cela on doit se rappeler que $|\vec{p}_1, \vec{q}_1\rangle$ représente le même état que $|\vec{p}_j, \vec{q}_j\rangle$ si les quatre vecteurs sont reliés par la relation 4.

Ainsi par exemple :

$$\langle \vec{p}_1, \vec{q}_1 | \chi_1 \rangle = \langle \vec{p}_2, \vec{q}_1 | \chi_1 \rangle = \chi_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$$

avec :

$$\vec{p}_2 = \alpha_{21} \vec{p}_1 + \beta_{21} \vec{q}_1$$

$$\vec{q}_2 = -\beta_{21} \vec{p}_1 + \alpha_{21} \vec{q}_1$$

on en déduit que :

$$F_1(\vec{q}_1) = - \int d\vec{p}_1 \frac{g_1(p_1) \tau_1(\varepsilon - q_1^2) g_2(p_2) F_2(\vec{q}_2)}{E + i\varepsilon - p_1^2 - q_1^2} + \dots$$

On peut remplacer l'intégration sur $\vec{p}_2$ par l'intégration sur $\vec{q}_2$ liés par 4 et le système 39 s'écrit :

$$40 \quad F_i(\vec{q}_i) = \sum_{j \neq i} \int d\vec{q}_j K_{ij}(\vec{q}_i, \vec{q}_j) \tau_j(\varepsilon - q_j^2) F_j(\vec{q}_j) + (1 - \delta_{i3}) F_{i0}(\vec{q}_i)$$

avec :

$$41 \quad K_{ij}(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = \frac{g_i(p_i) g_j(p_j)}{|\beta_{ji}|^3 (p_j^2 + q_j^2 - E - i\varepsilon)} \quad \begin{aligned} \vec{p}_i &= (\vec{q}_j - \alpha_{ji} \vec{q}_i) / \beta_{ji} \\ \vec{p}_j &= (\alpha_{ji} \vec{q}_j - \vec{q}_i) / \beta_{ji} \end{aligned}$$

et par définition :

$$42 \quad F_{i0}(\vec{q}_i) = - \int d\vec{p}_i g_i(p_i) \langle \vec{p}_i, \vec{q}_i | \Phi_{30} \rangle$$

Comme on l'a vu en 17 ceci devient :

$$F_{i0}(\vec{q}_i) = - \int d\vec{p}_i g_i(p_i) \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_{i0}) \tau_i(p_i)$$

en utilisant l'expression 35 de $\mathcal{E}_i$ et en intégrant sur $d\vec{q}_3$ on obtient

$$F_0(\vec{q}_i) = -\frac{1}{|\beta_3|^3} \frac{g_i(p_i) g_3(p_3) \langle g_3 | \mathcal{E}_3 \rangle}{E_3 + p_3^2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{p}_i &= (\vec{q}_{30} - \alpha_{3i} \vec{q}_i) / \beta_{3i} \\ \vec{p}_3 &= (\alpha_{3i} \vec{q}_{30} - \vec{q}_i) / \beta_{3i} \end{aligned}$$

le dénominateur se transforme avec l'expression 18 de E_3 et on retrouve le noyau :

$$43 \quad F_0(\vec{q}_i) = K_{i3}(\vec{q}_i, \vec{q}_{30}) \langle g_3 | \mathcal{E}_3 \rangle$$

Si le problème de la solution des équations de Faddeev est déjà grandement facilité puisqu'on obtient avec le système 40 des équations intégrales couplées dépendant d'une variable vectorielle, sa solution n'est pas encore possible et il faut se ramener à des intégrales à une dimension. Ceci se fait par la décomposition angulaire ou autrement dit en utilisant la conservation du moment angulaire.

Nous pouvons remarquer auparavant que les grandeurs $F_i(\vec{q}_i)$ sont proportionnelles aux amplitudes de réaction ; en effet d'après la relation 30 on doit chercher la limite de $\langle \vec{p}_i \vec{q}_i | \chi_i \rangle$ lorsque $\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i0}$. Celle-ci est donnée par l'expression 38.

$$\lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i0}} \langle \vec{p}_i \vec{q}_i | \chi_i \rangle = g_i(p_i) F_i(\vec{q}_{i0}) \lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i0}} \tau_i(E - q_i^2)(E - p_i^2 - q_i^2)^{-1}$$

d'après les relations 21 et

$$g_i(p_i)(E - p_i^2 - q_i^2)^{-1} = -g_i(p_i)(E + p_i^2)^{-1} = \mathcal{E}_i(p_i) \langle g_i | \mathcal{E}_i \rangle^{-1}$$

le comportement de χ_i au voisinage du pôle est donné par la relation 37 finalement :

$$\lim_{\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i0}} \langle \vec{p}_i \vec{q}_i | \chi_i \rangle = \langle g_i | \mathcal{E}_i \rangle \mathcal{E}_i(p_i) F_i(\vec{q}_{i0}) / (q_{i0}^2 - q_i^2 + i\epsilon)$$

On retrouve bien le comportement singulier de χ_i pour l'impulsion physique de la voie i et en comparant cette dernière relation avec 30 l'amplitude de transition s'écrit :

$$43b \quad A_i(\hat{q}_{i0}) = \langle g_i | \mathcal{E}_i \rangle^{-1} F_i(\vec{q}_{i0})$$

I.3.2 - Décomposition angulaire du système 40

Dans le cas considéré cette décomposition est simple car les fonctions g_i qui apparaissent dans le noyau 41 dépendent de p_i^2 donc de q_i^2, q_j^2 et du cosinus u de l'angle formé par ces deux impulsions q_i et q_j . On peut donc écrire :

$$44 \quad K_{ij}(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = K_{ij}(q_i, u, q_j) = \sum_{\ell=0}^{\infty} K_{ij}^{\ell}(q_i, q_j) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\hat{q}_i) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}_j)$$

avec :

$$45 \quad K_{ij}^{\ell}(q_i, q_j) = 2\pi \int_{-1}^1 P_{\ell}(u) K_{ij}(q_i, u, q_j) du$$

Le terme inhomogène peut donc se développer d'après 44 et 43 sous la forme :

$$F_{i0}(\vec{q}_i) = \sum_{\ell=0}^{\infty} K_{i3}^{\ell}(q_i, q_{i0}) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\hat{q}_i) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}_{i0}) \langle q_3 | \mathcal{E}_3 \rangle$$

et il en est de même pour la solution que l'on peut écrire :

$$F_i(\vec{q}_i) = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_i^{\ell}(q_i) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\hat{q}_i) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}_{i0})$$

Les intégrales angulaires s'effectuent aisément et le système 40 devient :

$$46 \quad F_i^{\ell}(q_i) = \sum_{j \neq i} \int_0^{\infty} K_{ij}^{\ell}(q_i, q_j) \tau_j (\varepsilon - q_j^2) q_j^2 F_j^{\ell}(q_j) dq_j + \langle q_3 | \mathcal{E}_3 \rangle K_{i3}^{\ell}(q_i, q_{i0})$$

Pour chaque onde ℓ , le système 46 représente trois équations intégrales simples couplées. L'absence de couplage entre fonctions de ℓ différents est due à ce que l'interaction n'agit que dans l'état S et ℓ représente le moment angulaire total qui est conservé. La situation change donc si le potentiel peut agir dans d'autres ondes, le nombre d'équations couplées augmente très rapidement et on doit introduire la conservation du moment angulaire total et de la parité.

1.3.3 - Symétries éventuelles

Ce système couplé 46 peut être découplé dans trois cas. Le premier est celui où les trois particules sont identiques et donc par symétrie les trois fonctions F_i sont des fonctionnelles identiques. Ce cas n'est cependant pas approprié pour l'étude des réactions directes sur des noyaux. Le deuxième est celui où un potentiel est nul, il a été utilisé par Shanley et Aaron (Sh 66) pour l'étude des réactions de stripping. Le troisième est celui où deux particules sont identiques, c'est le cas que nous considérons.

Nous notons par p et n les deux particules identiques et par c la troisième. De l'expression 41 du noyau on peut obtenir les relations de symétries suivantes :

$$K_{pn}^{\ell}(q, q') = K_{np}^{\ell}(q, q') = K_{np}^{\ell}(q', q) = K_{pn}^{\ell}(q', q) = K^{\ell}(q, q')$$

$$K_{pc}^{\ell}(q, q') = K_{cp}^{\ell}(q', q) = K_{cn}^{\ell}(q', q) = K_{nc}^{\ell}(q, q') = \tilde{K}^{\ell}(q, q')$$

On pose de la même manière :

$$\tau_p = \tau_n = \tau$$

$$\tau_c = \tilde{\tau}$$

et : $S^{\ell}(q) = F_p^{\ell}(q) + F_n^{\ell}(q)$

$$D^{\ell}(q) = F_p^{\ell}(q) + F_n^{\ell}(q)$$

Alors le système 46 devient :

$$47 \left\{ \begin{array}{l} S^{\ell}(q) = \int_0^{\infty} dq' K^{\ell}(q, q') \tau(E - q'^2) q'^2 S^{\ell}(q') + 2 \int_0^{\infty} dq' \tilde{K}^{\ell}(q, q') \tilde{\tau}(E - q'^2) q'^2 F_c^{\ell}(q') \\ \quad + \langle q_3 | \mathcal{V}_3 \rangle K_{n3}^{\ell}(q, q_{30}) (2 - \delta_{p3} - \delta_{n3}) \\ D^{\ell}(q) = - \int_0^{\infty} dq' K^{\ell}(q, q') \tau(E - q'^2) q'^2 D^{\ell}(q') + \langle q_3 | \mathcal{V}_3 \rangle K_{n3}^{\ell}(q, q_{30}) (\delta_{n3} - \delta_{p3}) \\ F_c^{\ell}(q) = \int_0^{\infty} dq' \tilde{K}^{\ell}(q', q) \tilde{\tau}(E - q'^2) S^{\ell}(q') q'^2 + \langle q_3 | \mathcal{V}_3 \rangle K_{c3}^{\ell}(q, q_{30}) (1 - \delta_{c3}) \end{array} \right.$$

Ce système peut être découplé en posant :

$$\tilde{K}^l(q, q') = K^l(q, q') + \int_0^\infty \tilde{K}^l(q, q'') \tilde{\tau}(E - q'') \tilde{K}^l(q', q'') q''^2 dq''$$

et il devient :

$$48 \quad \begin{cases} S^l(q) = S_o^l(q) + \int_0^\infty \tilde{K}^l(q, q') \tilde{\tau}(E - q') q'^2 S^l(q') dq' \\ D^l(q) = D_o^l(q) - \int_0^\infty K^l(q, q') \tilde{\tau}(E - q') q'^2 D^l(q') dq' \\ F_{co}^l(q) = F_{co}^l(q) + \int_0^\infty \tilde{K}^l(q', q) \tilde{\tau}(E - q') q'^2 S^l(q') dq' \end{cases}$$

Les termes inhomogènes dépendent des conditions initiales :

Ainsi pour un faisceau de deutons d'impulsion relative qd , la particule 3 représente le cosur et on a :

$$49 \quad \begin{cases} S_o^l(q) = 2 \langle q_c | \psi_c \rangle \tilde{K}^l(q, q_d) \\ D_o^l(q) = 0 \\ F_{co}^l(q) = 0 \end{cases}$$

Pour les réactions d'échange on considère un faisceau de protons, alors la particule 3 est un proton d'impulsion relative qp et on a :

$$50 \quad \begin{cases} S_o^l(q) = \langle q_p | \psi_p \rangle \tilde{K}^l(q, q_p) \\ D_o^l(q) = -\langle q_p | \psi_p \rangle K^l(q, q_p) \\ F_{co}^l(q) = \langle q_p | \psi_p \rangle \tilde{K}^l(q_p, q) \end{cases}$$

Ce sont donc les équations 48 avec les termes inhomogènes 49 ou 50 qui seront résolues dans les sections suivantes.

I.4 - RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES 48

Toutes les méthodes de résolution des équations intégrales consistent à remplacer l'intégrale par une somme discrète et limitée. Ceci est possible si l'intégrand est suffisamment monotone ou s'il possède des singularités isolées que l'on peut prendre en compte dans une fonction densité. Nous allons voir dans la suite que ceci n'est pas le cas pour la résolution des équations 48 ou au moins les noyaux $K_{ij}^l(q_i, q_j) \tau_j(E - q_j^2)$ varient très rapidement, manifestant ainsi des singularités que nous allons préciser.

I.4.1 - Singularités du noyau

Le premier type de singularité est dû à la matrice de transition : que le potentiel soit séparable ou non, on sait que l'opérateur $T_j(E - q_j^2)$ a au moins les pôles dus aux états liés et une coupure d'unitarité. Dans notre cas on a un seul état lié pour $q_j^2 = E + E_j = q_{j0}^2$ c'est-à-dire pour l'impulsion asymptotique dans la voie j . Suivant la valeur de E on a donc les trois situations décrites sur la figure 4.

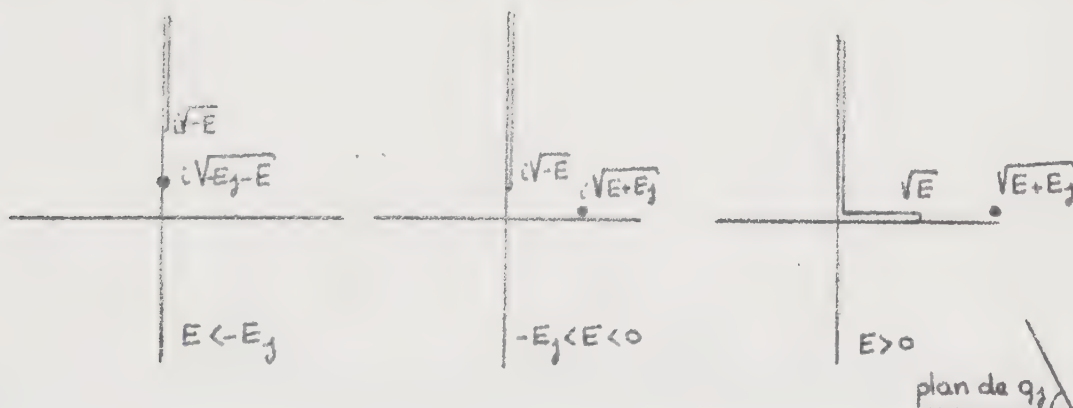


FIGURE 4 : Singularités fixes du noyau des équations de Faddeev dues à l'opérateur de transition à deux corps en fonction de la variable q_j .

Dans l'intégration q_j varie de 0 à ∞ et pour $E > -E_j$ le chemin d'intégration passe juste en-dessous du pôle et l'intégrand varie fortement. Une telle singularité est dite fixe car sa position est indé-

pendante de q_j . On peut en tenir compte exactement en utilisant une fonction densité de la forme $(q_j - q_{j0})^{-1}$. En fait nous verrons dans la suite que l'on peut procéder plus simplement.

D'autres singularités sont proches de l'axe d'intégration dès que $E > 0$. Elles sont dues au zéro du dénominateur de $K_{ij}^L(q_i, q_j)$. D'après l'expression 41 ceci se produit pour :

$$E - p_j^2 - q_j^2 = E - p_i^2 - q_i^2 = 0$$

ou encore :

$$\beta_{ij}^2 E - q_i^2 - q_j^2 + 2\alpha_{ij} q_i q_j u = 0$$

C'est-à-dire lorsque $q_j = \tilde{q}_j(q_i, u)$

$$51 \quad \tilde{q}_j(q_i, u) = \alpha_{ij} q_i u \pm (\beta_{ij}^2 (E + iE) + (\alpha_{ij}^2 u^2 - 1) q_i^2)^{1/2}$$

Lorsque u varie de -1 à 1 et lorsque q_i varie de 0 à ∞ , on obtient les trajectoires représentées sur la figure 5.

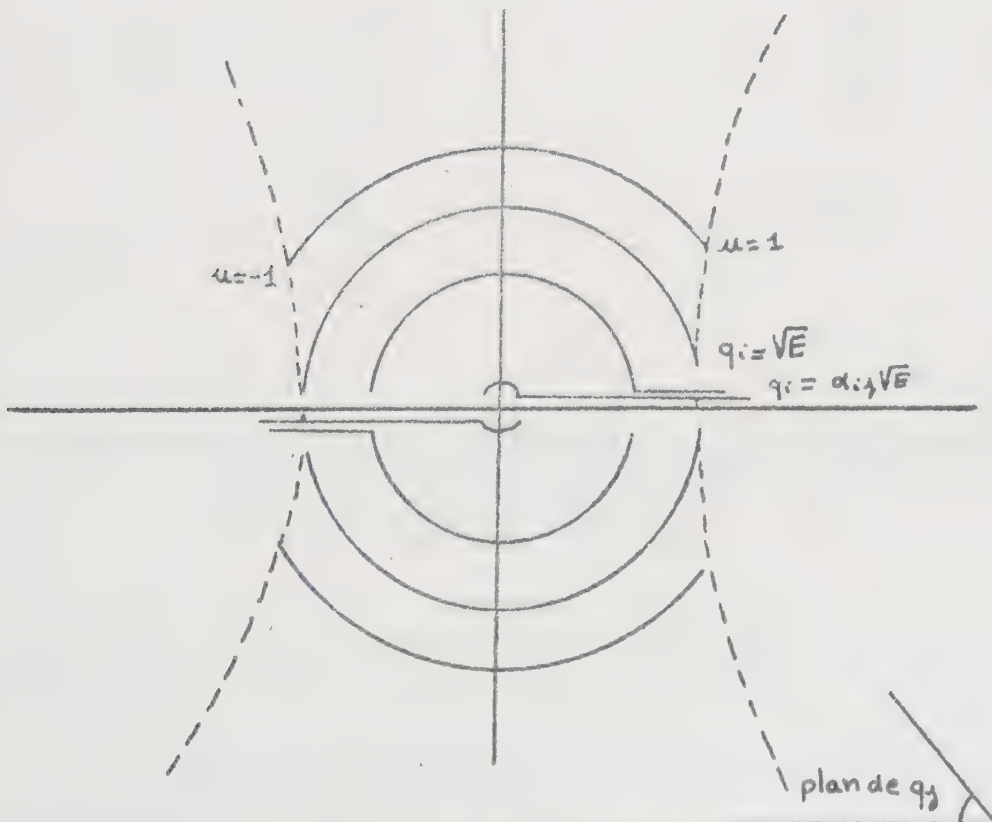


FIGURE 5 : Trajectoire de $\tilde{q}_j(q_i, u)$ en fonction de u pour différentes valeurs de q_i dans le plan complexe de q_j . Ces trajectoires s'éloignent de l'axe réel dès que $q_i^2 > E$.

Lorsque l'on effectue l'analyse en polynômes de Legendre pour calculer K_{1j}^L selon la relation 45, on obtient (appendice A.2) des singularités logarithmiques pour :

$$q_j = \tilde{q}_j^+(q_i, 1) \quad \text{et} \quad q_j = \tilde{q}_j^-(q_i, -1)$$

Ces singularités dites mobiles car leurs positions dépendent de q_i décrivent des trajectoires déterminées par :

$$52 \quad \begin{aligned} \tilde{q}_j^+(q_i) &= -\alpha_{ij} q_i + |\beta_{ij}| (E + iE - q_i^2)^{1/2} \\ \tilde{q}_j^-(q_i) &= \alpha_{ij} q_i + |\beta_{ij}| (E + iE - q_i^2)^{1/2} \end{aligned}$$

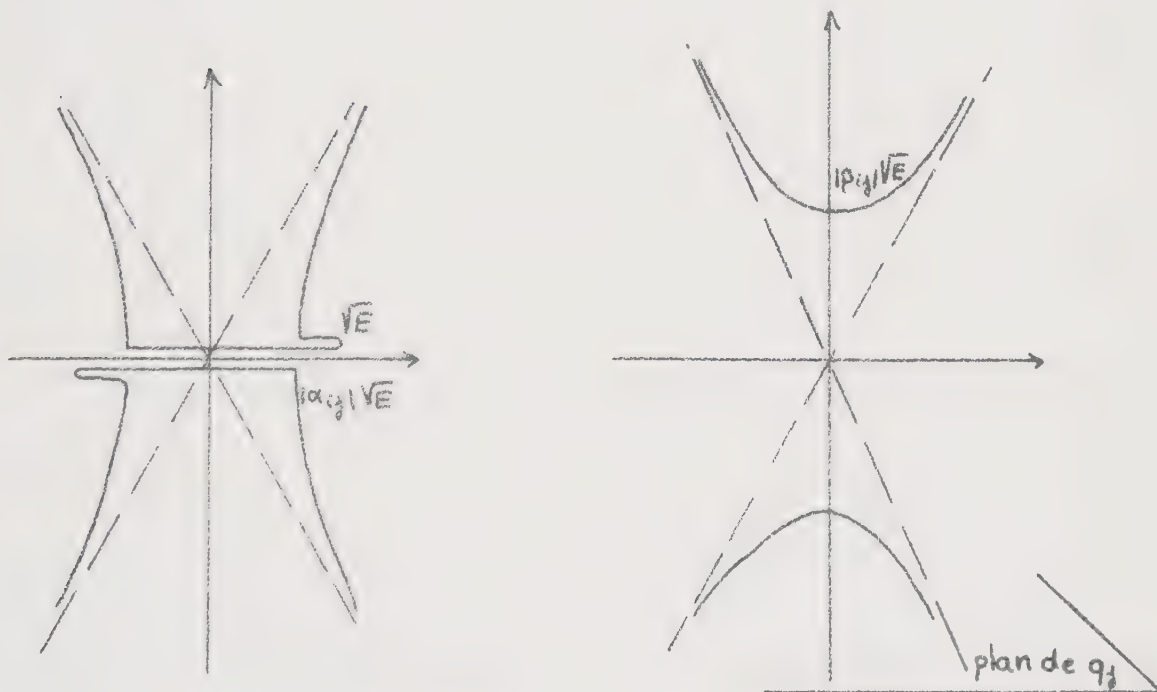


FIGURE 6 : Trajectoires des singularités logarithmiques du noyau des équations de Faddeev dans le plan complexe de q_j pour q_i variant de 0 à l'infini.

ainsi que deux autres que l'on obtient par symétrie par rapport à l'origine.

L'allure de ces trajectoires est indiquée dans le tableau de variation :

q_i	0	$ \beta_{ij} \sqrt{E}$	$ \alpha_{ij} \sqrt{E}$	$\sqrt{E}$
$\tilde{q}_j^+$	$ \beta_{ij} \sqrt{E}$	$\nearrow 2 \alpha_{ij}\beta_{ij} \sqrt{E}$	$\nearrow \sqrt{E}$	$\searrow \alpha_{ij} \sqrt{E}$
$\tilde{q}_j^-$	$ \beta_{ij} \sqrt{E}$	$\searrow 0$	$\searrow$	$-\alpha_{ij} \sqrt{E}$

TABLEAU 1 : Tableau de variation de la partie réelle des singularités logarithmiques en fonction de q_i (E est supposé positif).

Dès que q_i est supérieur à $\sqrt{E}$, ces singularités s'éloignent de l'axe d'intégration. Les trajectoires deviennent en effet des hyperboles comme il est facile de le voir en explicitant la partie réelle et imaginaire de q_j :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{q}_j^\mp) &= x = \pm \alpha_{ij} q_i \\ \operatorname{Im}(\tilde{q}_j^\mp) &= y = \pm \beta_{ij} \sqrt{E + q_i^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\left(\frac{y}{\beta_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\alpha_{ij}}\right)^2 + E = 0$$

On a donc les deux situations représentées sur la figure 6.

D'autres singularités logarithmiques sont dues aux deux facteurs $g_i(p_i)$ et $g_j(p_j)$ et sont propres à l'interaction choisie. Elles ont lieu lorsque $p_i^2 + \gamma_i^2 = 0$ ou $p_j^2 + \gamma_j^2 = 0$ pour le potentiel de Yamaguchi, c'est-à-dire pour :

$$53 \quad \tilde{q}_j(q_i, u) = \alpha_{ij} q_i u \pm i \left(\alpha_{ij}^2 (1-u^2) q_i^2 + \beta_{ij}^2 \gamma_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\tilde{q}_j(q_i, u) = \left(q_i u \pm i \left(q_i^2 (1-u^2) + \beta_{ij}^2 \gamma_j^2 \right)^{1/2} \right) / \alpha_{ij}$$

Comme précédemment ces singularités deviennent logarithmiques lorsqu'on intègre sur u pour obtenir $K_{ij}^{\ell}(q_i, q_j)$. Elles se trouvent loin de l'axe réel d'intégration, mais elles auront cependant une grande importance dans la suite.

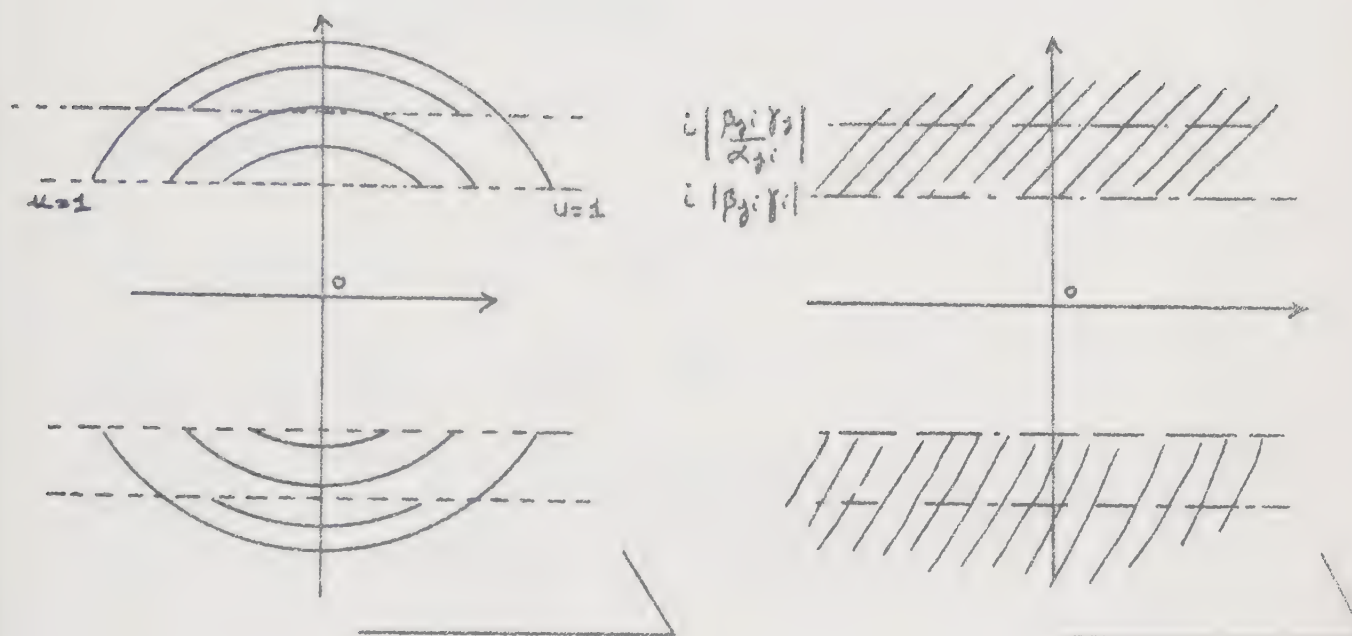


FIGURE 7 : Singularités logarithmiques dues à l'interaction séparable. À gauche on a tracé dans le plan complexe de q_j les trajectoires de $q_j(q_1, u)$.

En conclusion, pour des énergies positives, c'est-à-dire lorsque les trois corps peuvent s'éloigner infiniment les uns des autres, les méthodes classiques de résolution des équations intégrales ne sont pas utilisables. On utilise alors une autre méthode due à Hetherington

et Schick (He 65), que nous allons décrire et justifier dans le paragraphe suivant.

I.4.2 - Résolution d'une équation intégrale par déformation du contour d'intégration

Considérons l'équation intégrale du type de Fredholm de deuxième espèce :

$$54 \quad f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x, y) f(y) dy$$

où x et y parcourent le demi axe positif et $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy |K(x, y)|^2 < M$

D'après la théorie de Fredholm la solution de cette équation peut être obtenue par une série uniformément convergente dont chaque terme est construit avec les fonctions $f_n(x)$ définies par :

$$55 \quad \begin{aligned} f_{n=1}(x) &= g(x) \\ f_n(x) &= \int_0^{\infty} K(x, y) f_{n-1}(y) dy \end{aligned}$$

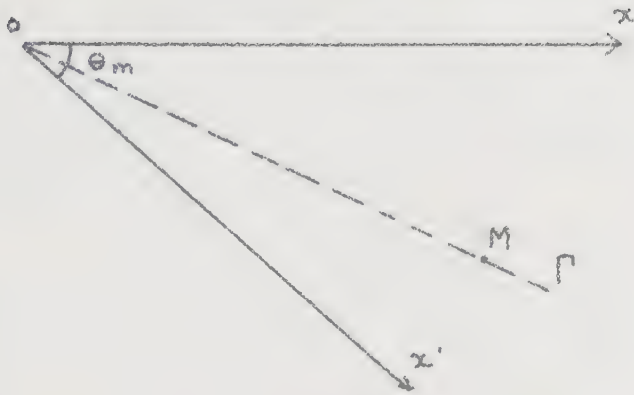
En particulier si $M < 1$ la solution peut être obtenue par substitutions successives dans la formule 54, ce qui fait apparaître les fonctions $f_n(x)$ et on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Nous laissons maintenant x et y devenir complexes et nous supposons que $g(x)$ a un prolongement analytique dans D (Hypothèse 1) que nous noterons $g(z)$.

Nous allons voir qu'avec certaines conditions chaque fonction $f_n(x)$ a un prolongement $f_n(z)$ analytique partout dans D .

Ceci est le cas pour $n = 1$ puisque $f_1(z) = g(z)$ qui est analytique d'après l'hypothèse 1. Nous allons alors raisonner par récurrence.

FIGURE 8 : Domaine d'analyticité de la fonction $g(z)$.

Supposons maintenant que l'on ait défini un prolongement analytique pour l'ordre $n-1$ de $f_{n-1}(x)$, c'est-à-dire $f_{n-1}(z)$ et considérons les deux fonctions suivantes :

$$f_n(z) = \int_0^{\infty} K(z, y) f_{n-1}(y) dy$$

56

$$F_n(z) = \int_{\Gamma} K(z, z') f_{n-1}(z') dz'$$

où Γ est le demi axe partant de O et passant par M .

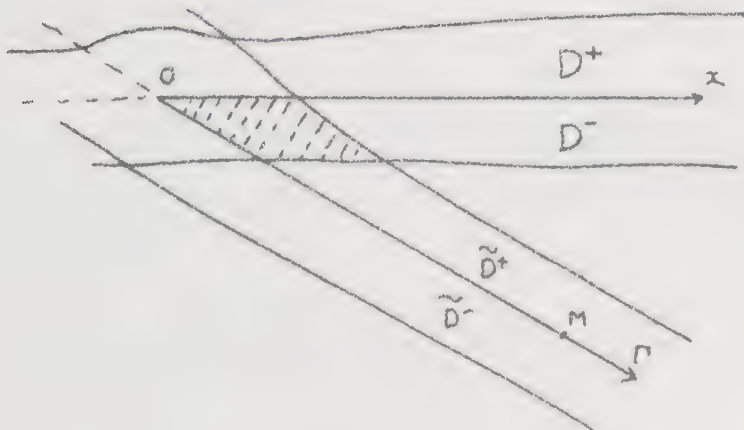


FIGURE 9 : Déformation du contour d'intégration

Lorsque y décrit le demi axe Ox les singularités de $K(z, 0 < y < \infty)$ décrivent des trajectoires obtenues par une équation de la forme $L(z, y) = 0$ et délimitant le domaine d'analyticité $D^+ \cup D^-$. Avec certaines conditions sur l'intégrale la fonction $f_n(z)$ (56) est analytique dans ce même domaine.

Lorsque z' décrit l'axe Γ les singularités du noyau se déplacent et délimitent un autre domaine d'analyticité $\tilde{D}^+ \cup \tilde{D}^-$ pour $F_n(z)$ qui est donc analytique au voisinage de M .

Considérons maintenant des points appartenant à $\tilde{D}^+ \cap D^-$ (si ce domaine existe). Par réciprocity quand z appartient à ce domaine les singularités de $K(z, z')$ en fonction de z' sont à l'extérieur du domaine limité par Ox et Γ , c'est-à-dire que la fonction $K(z, z')$ est analytique dans ce domaine comme par hypothèse la fonction $f_{n-1}(z')$.

Il s'en suit que d'après le théorème de Cauchy (si l'intégrale le long d'une portion de cercle à l'infini peut être rendue aussi petite que l'on veut):

$$\int_n(z) = \int_0^\infty K(z, y) \int_{n-1}(y) dy = \int_\Gamma K(z, z') \int_{n-1}(z') dz' = F_n(z)$$

pour : $z \in \tilde{D}^+ \cap D^-$

nous avons donc deux fonctions : l'une analytique dans $D^+ \cup D^-$, l'autre dans $\tilde{D}^+ \cup \tilde{D}^-$ qui s'identifient dans $D^- \cap \tilde{D}^+$; elles sont donc le prolongement analytique l'une de l'autre. Ainsi par récurrence on peut construire par la relation 56 le prolongement analytique pour un point M de D de toute fonction $f_n(x)$.

Il en est de même pour $f(x)$ qui a donc un prolongement analytique dans D . Ce prolongement peut être obtenu en tout point de D par une équation intégrale. En effet si on considère la série de Fredholm formée avec les fonctions :

$$\int_n(z) = \int_\Gamma K(z, z') \int_{n-1}(z') dz'$$

où z' décrit Γ , alors si :

$$\int_{\Gamma} dz' \int_{\Gamma} dz' |K(z, z')|^2 < M'$$

la limite de cette série est solution de l'équation intégrale.

$$57 \quad f(z) = \int_{\Gamma} K(z, z') f(z') dz' + g(z) \quad z \text{ et } z' \in \Gamma$$

Pour certains contours Γ décrits par z' , la fonction $K(z, z')$ peut être plus monotone que $K(x, y)$ et l'équation intégrale 57 est alors plus facile à résoudre que l'équation initiale. Une fois obtenue la valeur de la fonction $f(z)$ pour z appartenant à Γ , l'équation intégrale nous permet d'obtenir sa valeur en tout point du domaine $\tilde{D}^- \cup \tilde{D}^+$ en particulier pour les points de l'axe réel qui s'y trouvent. Si on désire la valeur de la solution de 54 en tout point de l'axe réel (ceci est nécessaire lorsqu'on examine des processus avec trois corps dans la voie de sortie) le problème est plus compliqué ; on peut cependant, par déformations successives, ramener le contour Γ sur l'axe réel.

Pour un système d'équations couplées comme le système 46 le raisonnement se généralise facilement car il est connu qu'un système d'équations intégrales couplées peut se ramener à un système du type 54. Il faut maintenant vérifier que la méthode présente peut s'appliquer dans notre cas.

Domaine d'analyticité des termes inhomogènes

Pour l'équation 46 il faut connaître le domaine d'analyticité de $K_{13}^L(q_1, q_{30})$ en fonction de q_1 . D'après l'étude précédente (relations 52 et 53) les singularités se trouvent à :

$$\alpha_{3i} q_{30} \pm i |\beta_{3i}| (E - q_3^2)^{1/2}$$

$$\alpha_{3i} q_{30} \pm i |\beta_{3i}| \gamma_3$$

$$(q_{30} \pm i |\beta_{3i}| \gamma_3) / |\alpha_{3i}|$$

Le domaine d'analyticité comprend au moins le secteur limité par Θ_m et $-\Theta_m$ où Θ_m est le plus petit argument des singularités pour tout indice i .

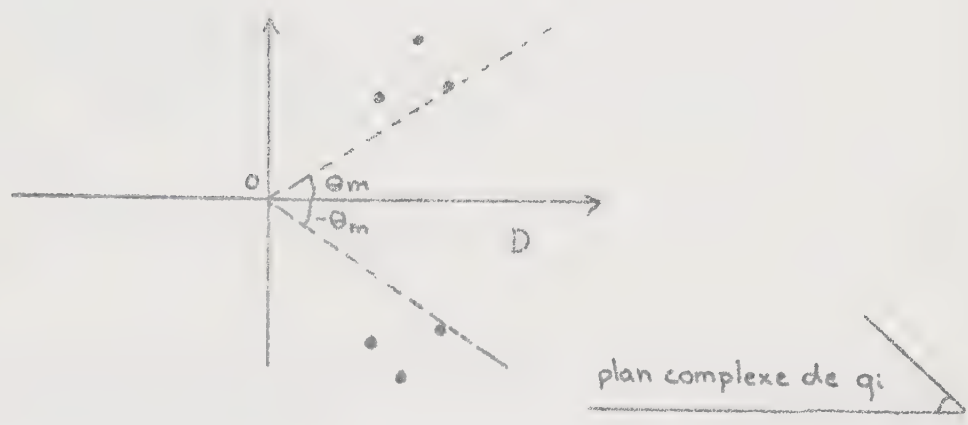


FIGURE 10 : Singularités du terme inhomogène des équations intégrales.

Existe-t-il un domaine $\tilde{D}^+ \cap D^-$?

A cause de la singularité fixe de la matrice de transition qui se trouve toujours au-dessus de l'axe réel on ne peut déformer le contour que vers le bas.

Lorsqu'une impulsion décrit l'axe réel on se trouve alors dans la situation étudiée précédemment et il en résulte le domaine $D^+ \cup D^-$ indiqué sur la figure 11.

Si on considère maintenant des impulsions décrivant Γ , les singularités s'éloignent beaucoup de cette demi droite. Ceci est représenté sur la figure 6, sur laquelle on peut voir que tant que $\Theta < \Theta_m < \pi/2$ il existe toujours un domaine $\tilde{D}^+ \cap D^-$, nécessaire pour la démonstration précédente.

La limite $\Theta_m = \frac{\pi}{2}$ provient des singularités du potentiel qui se trouvent toujours à la distance verticale d de l'axe d'intégration comme on peut le voir sur la relation 53 avec $d = \text{minimum} \left(\beta_1, \gamma_1, \frac{\beta_3 \gamma_3}{\alpha_{31}} \right)$

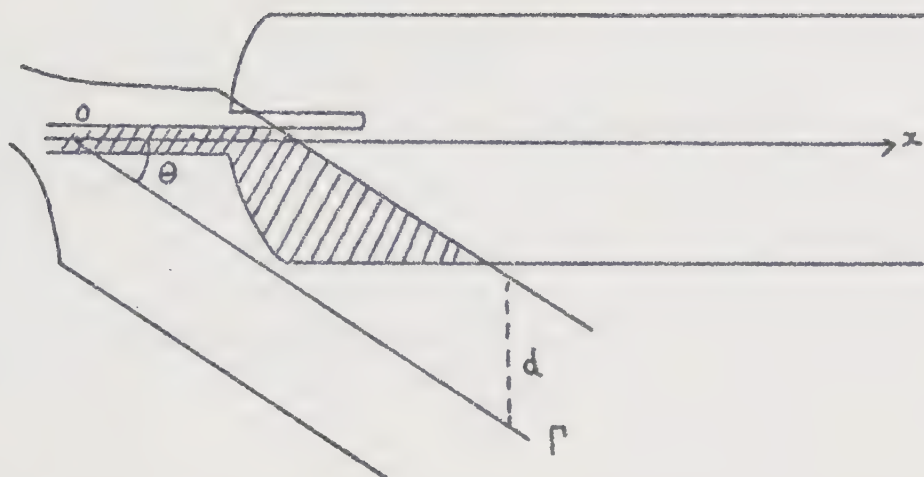


FIGURE 11 : Déformation du contour d'intégration pour résoudre les équations de Faddeev.

Conditions de Cauchy et noyau compact

Sur la forme explicite du noyau donnée en appendice (A.3) ou directement sur son expression [41] on peut voir que le noyau de l'équation intégrale se comporte asymptotiquement en z^{-6} ou z^{-4} , il s'en suit que la solution se comporte en z^{-4} et donc que l'intégrant qui apparaît dans la relation [54] se comporte en z'^{-10} et le Lemme de Jordan est satisfait. La compacité du noyau -c'est-à-dire la valeur finie de

$\iint_{\Gamma \Gamma} |K(z, z')| dz dz'$ - résulte elle aussi de ce comportement relativement convergent. En fait le noyau possède les singularités décrites précédemment cependant de telles singularités ont été étudiées par les mathématiciens qui ont montré que les théorèmes de Fredholm restent valables si $\iint_{\Gamma \Gamma} |K(z, z')|^2 dz dz'$ est finie, ce qui est le cas pour les singularités rencontrées dans ce problème.

I.4.3 - Résolution numérique

Les équations [46], ou ce qui revient au même les équations [48], ont été résolues par la méthode de déformation du contour. Pour des angles Θ allant de 10° à 20° le noyau est relativement monotone et on a choisi la méthode de discrétisation la plus simple, où on approxime l'intégrant par une suite d'arcs de paraboles. De nombreux tests ont été effectués sur le nombre de points choisis et leur position. La meilleure vérification a été de changer l'angle de déformation et de constater la relative stabilité des résultats après retour sur l'axe réel. Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 2 ci-dessous :

Θ	L	N	AMPLITUDE	PARTIE RÉELLE	PARTIE IMAGINAIRE
10°	25	26	$T_{\pi}^0 - T_{\pi}^0$	— 6,910	— 14,55
10°	30	30		— 6,945	— 14,57
20°	30	30		— 6,998	— 14,58
15°	25	26	T_{π}^0	36,38	1,095
20°				36,17	1,037
15°	25	26	T_{π}^0	1,516	— 4,163
20°				1,611	— 4,382

Θ angle de déformation du contour d'intégration.

L limite supérieure des intégrales (unités arbitraires).

N nombre de points de la discrétisation.

TABLEAU 2 : Variations des grandeurs calculées (amplitudes) en fonction des différents paramètres propres à la résolution des équations intégrales.

Nous avons envisagé des énergies allant de 6 MeV à 30 MeV et il a fallu considérer les ondes allant de $\ell = 0$ jusqu'à $\ell = 12$. Une telle résolution a été faite sur une IBM 7044 et nécessitait environ une à deux minutes.

CHAPITRE II

INTERPRETATION DES REACTIONS DIRECTES

Pour le modèle simple que nous avons considéré, c'est-à-dire trois particules sans spin interagissant par des potentiels séparables du type de Yasaguchi, la solution "exacte" a été obtenue par la méthode exposée au premier chapitre. Par les relations I 43b on obtient les différentes amplitudes de transition vers des voies $i + (jk)$. Il est alors possible de comparer ces amplitudes exactes à celles obtenues par les méthodes approximatives utilisées par ailleurs dans le cadre de ce modèle. Une telle comparaison va être reportée dans la suite, mais auparavant nous allons rappeler les approximations que l'on fait habituellement pour l'interprétation des réactions directes.

II.1 - APPROXIMATION DE BORN POUR DES ONDES DEFORMEES (D.W.B.A.)

Considérons les trois particules i j k interagissant entre elles par les potentiels V_i , V_j , V_k . Dans la voie d'entrée la particule i arrive sur l'état lié (j,k) . L'amplitude T_{j1} de la réaction $i + (j,k) \rightarrow j + (i,k)$ est donnée par l'expression habituelle :

$$1 \quad T_{j1} = \langle \Phi_j | V_i | \Psi_i^+ \rangle$$

ou aussi bien par :

$$2 \quad T_{ji} = \langle \Psi_j^- | V_j + V_k | \Phi_i \rangle$$

Φ_i ou (Φ_j) est le produit de l'état lié jk (ou (ik)) par une onde plane du mouvement relatif $i/(jk)$ d'impulsion $\vec{q}_1$ (ou $\vec{q}_j$) dirigée le long du faisceau (ou vers la cible). $\Psi_i^\pm$ est donnée par l'expression :

$$3 \quad |\Psi_i^\pm\rangle = (1 + (E \pm i\epsilon - H)^{-1} (V_j + V_k)) |\Phi_i\rangle$$

où H est l'hamiltonien total du système.

On introduit les ondes déformées par les potentiels W_i :

$$4 \quad |X_i^\pm\rangle = (1 + (\epsilon \pm (\epsilon - H_0 - V_i - W_i)^{-1} W_i)) |\Phi_i\rangle$$

où H_0 est l'opérateur énergie cinétique. Pratiquement W_i n'agit que sur la distance relative de la particule i au centre de masse du système (j,k) , méritant ainsi le nom de potentiel optique qui ne modifie pas le système jk mais seulement le mouvement relatif $i - (jk)$.

Les expressions 1 et 2 peuvent, après quelques calculs se réécrire sous les formes :

$$5 \quad T_{ji} = \langle X_j^- | V_i + V_k - W_j | \Psi_i^+ \rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i\epsilon (\langle X_j^- | - \langle \Phi_j |) \Phi_i \rangle$$

ou

$$6 \quad T_{ji} = \langle \Psi_j^- | V_j + V_k - W_i | X_i^+ \rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \langle \Phi_j | (X_i^+ - |\Phi_i\rangle)$$

Si le potentiel W_j ne modifie pas l'état lié jk , les expressions qui sont multipliées par $i\epsilon$ restent finies. Pour le démontrer on peut expliciter ces expressions dans l'espace d'impulsion et refaire le raisonnement du paragraphe I.1.3. Ceci est dû à ce qu'aucun des termes n'a de composante représentant trois particules libres et ainsi le recouvrement reste fini.

Ainsi pour des réactions du type (dp) on a la situation suivante :

$$\begin{aligned} i &= c \\ j &= p \\ k &= n \end{aligned}$$

On peut choisir comme potentiel optique pour le proton $V_n = W_p$ c'est-à-dire l'interaction du cœur avec le noyau et on a :

$$7 \quad T_{(d,p)} = \langle X_p^- | V_n + V_c - V_n | \Psi_d^+ \rangle = \langle X_p^- | V_{np} | \Psi_d^+ \rangle$$

en fait cette expression n'est vraie que si le cœur a une masse infinie sinon le deuxième terme en $i\epsilon$ n'est pas nul avec ce choix de W .

L'approximation DWBA consiste à remplacer dans les expressions 5 ou 6 la solution complète $\Psi^\pm$ par son expression approchée $X^\pm$ et on

obtient deux expressions non équivalentes d'ailleurs pour l'amplitude de transition :

$$8 \quad T_{ji}^+ = \langle X_j^- | V_i + V_k - W_j | X_i^+ \rangle$$

$$9 \quad T_{ji}^- = \langle X_j^- | V_j + V_k - W_i | X_i^+ \rangle$$

Ainsi habituellement on considère les expressions :

$$10 \quad T_{(d,p)}^{\text{DWBA}} = \langle X_p^- | V_{np} | X_d^+ \rangle$$

pour les réactions du type (d,p) et :

$$11 \quad T_{(p,n)}^{\text{DWBA}} = \langle X_n^- | V_{np} | X_p^+ \rangle$$

pour les réactions du type (p,n).

II.2 - APPROXIMATION SODAINE ET D.W.T.A.

Dodd et Greider (Do 66) ont montré que l'une ou l'autre de ces expressions représentant le premier terme d'une série non convergente. Ceci ne veut pas dire que ces approximations soient à rejeter mais plutôt que leur justification théorique est difficile. Pour remédier à cette divergence propre à un problème à trois corps ces auteurs se sont inspirés de la démarche de Faddeev et ont obtenu les expressions suivantes pour remplacer les expressions 10 et 11 :

$$12 \quad T_{(d,p)}^{\text{D.G}} = \langle X_p^- | V_{np} (1 + (E_n - H_0 - V_p - V_n)^{-1} (V_p + V_n)) | \Phi_d \rangle$$

$$13 \quad T_{(p,n)}^{\text{D.G}} = \langle X_n^- | T_{np} | X_p^+ \rangle$$

Si on compare l'expression 12 à l'expression exacte 7 on voit qu'elle diffère par l'absence de l'interaction n-p dans la fonction de Green. Ceci revient à faire l'hypothèse qu'une fois le deuton dans le champ du noyau l'interaction neutron-proton est débranchée et que les nucléons diffusent indépendamment.

Le calcul de l'expression 12 est compliqué et pour le simplifier Dodd et Greider font l'hypothèse que le cœur a une masse infinie et ils factorisent le propagateur $1 + (E + i\epsilon - H_0 - V_p - V_n)^{-1} (V_p + V_n)$ en un produit de propagateurs déformant individuellement les ondes planes de chaque nucléon. Ceci est cependant incorrect comme nous allons le voir.

Considérons l'action de ce propagateur sur l'état $|\vec{n} \vec{p}\rangle$ représentant des ondes libres de proton et neutron. Il est facile de vérifier avec la relation $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1} (B - A) B^{-1}$ que l'on a :

$$14 \quad (1 + (E + i\epsilon - H_0 - V_p - V_n)^{-1} (V_p + V_n)) |\vec{p} \vec{n}\rangle = (1 + (E - H_0 - V_p - V_n)^{-1} V_n) (1 + (E - H_0 - V_p)^{-1} V_p) |\vec{p} \vec{n}\rangle$$

Si on appelle H_0^p et H_0^n les opérateurs énergie cinétique du proton et du neutron on peut poser :

$$15 \quad (1 + (E - H_0 - V_p)^{-1} V_p) |\vec{p} \vec{n}\rangle = |\vec{p}\rangle (1 + (E - p^2 - H_0^n - V_n)^{-1} V_n) |\vec{n}\rangle = |\vec{p}\rangle \chi_n^+(E - p^2)$$

Cependant $\chi_n(E - p^2)$ n'est pas une onde de diffusion physique car l'énergie $E - p^2$ à laquelle se fait la diffusion est différente de l'énergie cinétique n^2 de la particule à l'infini. En effet il n'y a pas de raison pour que l'on ait :

$$16 \quad E = p^2 + n^2$$

Si on commet cette erreur alors χ_n est état propre de $H_{on} + V_{nc}$ avec la valeur propre $E - p^2$ et l'expression 14 devient avec 15 :

$$\begin{aligned} (1 + (E - H_0 - V_{pc} - V_{nc})^{-1}) |\vec{p}\rangle \chi_n^+ &= |\chi_n^+\rangle (1 + (E - H_0^p - V_{pc} - E - p^2)^{-1} V_{pc}) |\vec{p}\rangle \\ &= |\chi_n^+\rangle (1 + (p^2 - H_0^p - V_{pc})^{-1} V_{pc}) |\vec{p}\rangle \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$|\chi_n^+ \chi_p^+\rangle$$

et Dodd et Greider remplacent l'expression 12 par :

$$17 \quad T_{(d,p)}^0 = \iint \langle \chi_p^- | V_{np} | \chi_p^+ \chi_n^+ \rangle d\vec{p} d\vec{n} \langle \vec{p} \vec{n} | \Phi_d \rangle$$

Cette expression, connue sous le nom d'approximation "soudaine", avait été déjà proposée par Butler (Bu 65) et indépendamment par Tanifuji (Ta 64) - et nous l'évaluerons aussi dans notre comparaison.

Il n'en reste pas moins que le passage de 12 à 17 est faux à moins que dans l'intégrale 17 les seules contributions importantes aient lieu lorsque $p^2 + n^2 = E$. En fait dans le terme $\langle \vec{p} \vec{n} | \Phi_d \rangle$ la conservation de l'impulsion totale introduit la relation :

$$\vec{p} + \vec{n} = \sqrt{2} \vec{q}_d$$

(Le terme $\sqrt{2}$ provient de la définition I.2 des impulsions). Il s'en suit que l'on peut écrire :

$$p^2 + n^2 = \left| \frac{\vec{p} + \vec{n}}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{\vec{p} - \vec{n}}{\sqrt{2}} \right|^2 = q_d^2 + \left| \frac{\vec{p} - \vec{n}}{\sqrt{2}} \right|^2 = q_d^2 + k^2$$

où $\vec{q}_d$ est l'impulsion du deuton et $\vec{k}$ l'impulsion relative dans le deuton. D'après la formule I.18 on a alors :

$$18 \quad p^2 + n^2 = E + 2,225 + k^2$$

L'énergie cinétique relative dans le deuton est de l'ordre de son énergie de liaison et pour une énergie $E \gg 2.225$ on a approximativement $p^2 + n^2 = E$.

C'est-à-dire que les expressions 12 de Dodd et Greider et 17 de Butler sont identiques.

Pour les réactions d'échange l'expression 13 proposée par Dodd et Greider consiste à modifier dans l'expression DWBA classique l'interaction neutron - proton par la matrice de transition entre ces deux nucléons évaluée à l'énergie totale moins l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse. Son calcul est cependant beaucoup plus compliqué.

II.3 - COMPARAISON AVEC LA SOLUTION EXACTE

II.3.1 - Réactions du type (dp)

Nous avons comparé la section efficace "exacte" obtenue par la résolution des équations de Faddeev aux expressions 12 de Dodd et Greider et 17 de Butler.

Le calcul de l'expression 12 de Dodd et Greider est à peine moins difficile que la résolution des équations de Faddeev ; en effet il faut obtenir l'expression :

$$|\Psi\rangle = (1 + (E - H_0 - V_p - V_n)^{-1} (V_p + V_n)) \Phi_d$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} 19 \quad (E - p^2 - n^2) \Psi(\vec{p}, \vec{n}) &= \int d\vec{p}' V_n(\vec{p}, \vec{p}') \Psi(\vec{p}', \vec{n}) + \int d\vec{n}' V_p(\vec{n}, \vec{n}') \Psi(\vec{p}, \vec{n}') \\ &+ \langle \vec{p}, \vec{n} | (V_p + V_n) | \Phi_d \rangle \end{aligned}$$

Compte tenu des potentiels séparables utilisés cette relation conduit à un système de deux équations intégrales couplées qui a été résolu de la même manière que pour les équations de Faddeev.

Le calcul de l'expression 17 ou approximation soudaine est beaucoup plus simple. Nous avons aussi évalué l'approximation de Born avec interaction dans l'état final dont l'expression est :

$$20 \quad \langle \chi_p^- | V_{np} | \Phi_d \rangle$$

qui apparaît dans l'expression 17 et est due à la partie onde plane de χ_p^+ et χ_n^+ .

La comparaison a été faite pour deux énergies $E = 6$ et 30 MeV et pour trois forces d'interactions nucléon-cœur responsables d'un état lié à l'énergie $\xi = 1, 2$ et 4 MeV et pour lequel la moyenne du carré du rayon a été fixée à 3.5^2 Fermi².

Ces différentes comparaisons sont portées sur les courbes ci-après.

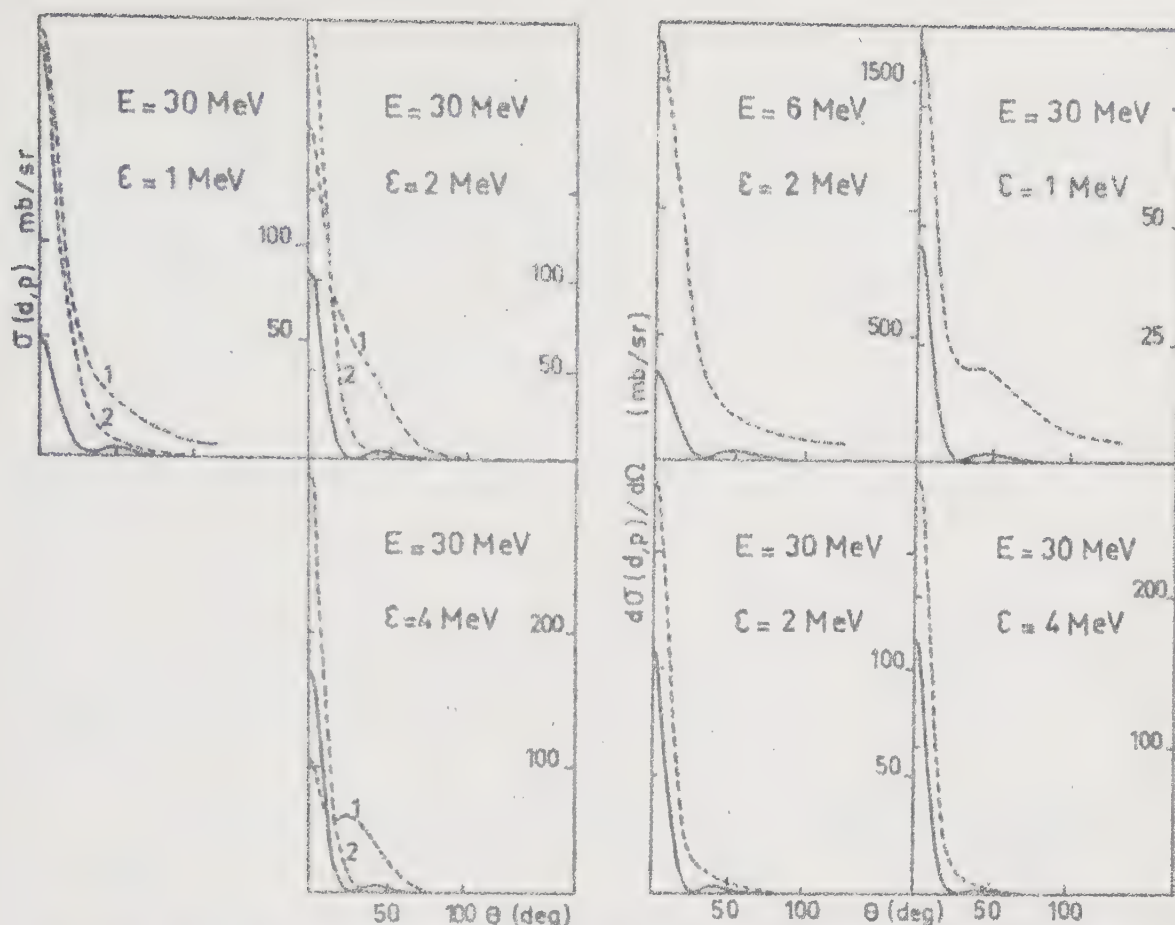


FIGURE 12 : Section efficace de la réaction (p,d) pour deux valeurs de l'énergie 6 et 30 MeV et différentes énergies de liaison du neutron $\epsilon = 1, 2, 4$ MeV. La valeur exacte est représentée en traits pleins. Sur les courbes de gauche on a porté la valeur obtenue par l'approximation soudaine --- 1 et la B.A.W.F.D. --- 2. Sur les courbes de droite on a porté en pointillé l'approximation de Dodd et Greider.

D'une manière générale on remarque que les sections efficaces sont nettement surestimées d'un facteur de l'ordre de deux pour 30 MeV et de l'ordre de 4 pour 6 MeV. Pour l'approximation de Dodd et Greider on vérifie que si l'interaction nucléon-noyau augmente l'erreur commise en négligeant l'interaction proton-neutron apparaît moins. Ceci est d'ailleurs aussi net pour l'approximation soudaine. La différence entre la BAWF et l'approximation soudaine augmente aussi si l'interaction nucléon-noyau augmente, ceci était attendu car la distorsion des ondes planes de proton et neutron augmente. Il est troublant de voir la différence entre les approximations de Dodd et Greider et l'approximation soudaine que l'on aurait pu croire équivalentes d'après la relation 18. Ceci montre

l'importance des effets hors couche. La comparaison avec la D.W.B.A., faite par Shanley (Sh 66), est aussi déconcertante : le désaccord est du même ordre de grandeur, la distribution angulaire redonne le deuxième maximum, mais ceci est dû au choix d'un potentiel optique local et dont les paramètres ont été adaptés au mieux.

II.3.2 - Réactions du type p,n

Pour les réactions de ce type nous avons évalué l'approximation de Born entre ondes planes, dont l'expression est :

$$21 \quad \langle \Phi_n | V_{np} | \Phi_p \rangle$$

ainsi que l'approximation de Born entre des ondes déformées (expression 11) et l'expression 13 de Dodd et Greider ou approximation de la matrice de transition entre des ondes déformées.

Les résultats sont reportés sur la figure ci-dessous :

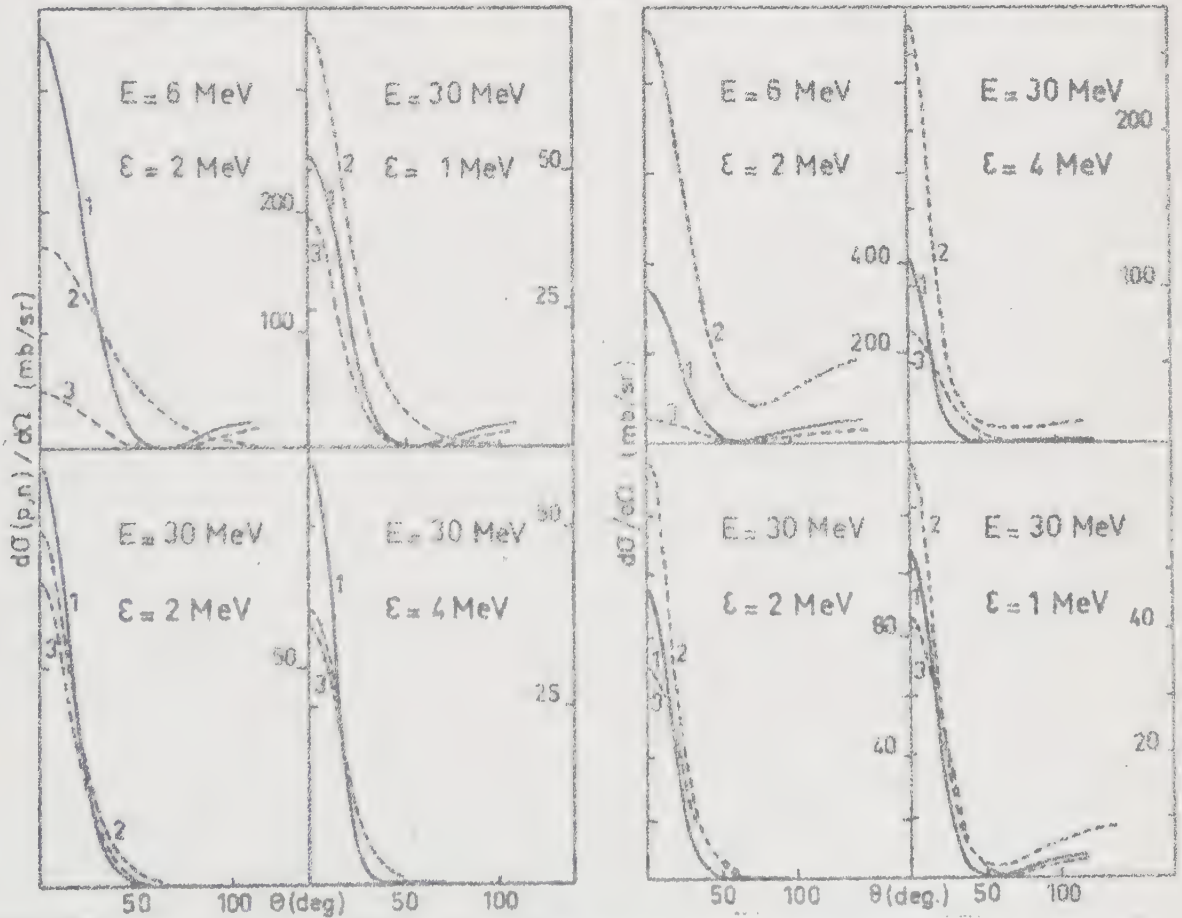


FIGURE 13 : Section efficace d'échange (p,n) pour deux valeurs de l'énergie E 6 et 30 MeV et différentes énergies de liaison du neutron $\epsilon = 1, 2, 4$ MeV. La valeur exacte obtenue par les équations de Faddeev est représentée en traits pleins. La D.W.B.A. est représentée par les courbes en tirets --- 3. La section efficace obtenue par la D.W.T.A. et l'approximation de Born sont représentées par les courbes en pointillé --- 2 respectivement sur les figures de droite et de gauche.

On voit que ces trois approximations donnent des résultats de plus en plus voisins, en même temps que corrects, si l'énergie croît et si l'interaction nucléon-noyau décroît. Ceci correspond à une section efficace moindre ou encore à un phénomène peu important qui est bien rendu par toute approximation. L'expression de Dodd et Greider ne semble pas donner de résultat plus intéressant que la classique D.W.B.A. qui elle-même ne semble pas meilleure que la vieille approximation de Born. Si l'expression de Dodd et Greider par ses effets hors de la couche tend à surestimer la section efficace, la D.W.B.A. tend à la sous-estimer. La comparaison entre ces deux approximations pourrait sans doute donner un ordre de grandeur de l'erreur.

II.4 - CONCLUSION

De ce qui suit on ne peut tirer de conclusions trop catégoriques mais plutôt des indications. En effet le modèle est trop éloigné de la réalité, c'est-à-dire que nous ne sommes pas dans les conditions habituelles d'emploi de ces méthodes approximatives. Ceci est particulièrement évident si on examine la forme des distributions angulaires dans lesquelles on ne voit pas apparaître la figure de diffraction caractéristique. Ceci est vraisemblablement dû à l'absence complète d'absorption dans ce modèle et à l'interaction choisie qui n'agit que dans l'onde S. On sait d'autre part que la D.W.B.A. reproduit habituellement les distributions expérimentales, ce qui n'est pas le cas ici. Une telle différence entre les prédictions du modèle et la réalité se constate aussi sur l'importance relative des phénomènes inélastiques. En pratique les phénomènes inélastiques sont relativement peu importants alors que dans le modèle ils sont du même ordre de grandeur que les élastiques, aussi l'emploi des méthodes perturbatives comme la D.W.B.A. donnera généralement des résultats meilleurs que ce que l'on a pu voir dans le modèle.

Ainsi pour les réactions d'échange la D.W.W.A. est à peine meilleure que la D.W.B.A. Lorsque celle-ci est correcte, ailleurs ces deux approximations sont en même temps peu adéquates et il ne semble donc pas justifié de compliquer l'approximation classique par l'emploi d'une matrice de transition habituellement difficile à obtenir. Pour les réactions de stripping en comparant les résultats des deux appro-

ximations avec les nôtres, il semble aussi que la D.W.B.A. soit aussi bonne que les autres tout en étant la plus simple. On ne peut pas dire cependant que cette approximation soit excellente ; d'après les courbes présentées elle ne doit être valable que pour une catégorie de situations et il semble que les renseignements spectroscopiques que l'on peut obtenir en l'utilisant soient plus qualitatifs que quantitatifs.

ximations avec les nôtres, il semble aussi que la D.W.B.A. soit aussi bonne que les autres tout en étant la plus simple. On ne peut pas dire cependant que cette approximation soit excellente ; d'après les courbes présentées elle ne doit être valable que pour une catégorie de situations et il semble que les renseignements spectroscopiques que l'on peut obtenir en l'utilisant soient plus qualitatifs que quantitatifs.

CHAPITRE III

EQUATIONS DE FADDEEV POUR DES POTENTIELS LOCAUX :

METHODES USUELLES

Pour la compréhension des mécanismes où interviennent trois corps le modèle simple précédent est extrêmement utile. Il contient, ou pourrait contenir moyennant quelques adjonctions, les caractéristiques essentielles de tout problème à trois corps et n'entraîne pas de calculs trop laborieux. De nombreux renseignements d'ordre qualitatif ont pu et pourront encore être obtenus avec ce modèle.

On peut cependant être intéressé par d'autres problèmes où il nous faut des prédictions quantitatives qui permettent de confirmer (ou d'infirmer) une certaine description, en particulier des interactions entre les corps en présence. Ainsi nous avons un certain nombre d'interactions nucléon-nucléon qui rendent bien compte de la diffusion libre ou du deuton, c'est-à-dire des interactions équivalentes "sur la couche d'énergie". On peut être intéressé par les prédictions de ces interactions pour deux nucléons en présence d'un troisième et les comparer à ce que l'on connaît sur le triton ou la diffusion nucléon-deuton. Etudier les interactions et particulièrement hors de la couche d'énergie est possible dans la mesure où des méthodes sûres permettent de résoudre les équations de Faddeev pour toute interaction locale ou séparable que l'on peut proposer.

Il y a donc eu un grand nombre de travaux qui ont apporté des solutions au problème le plus simple : celui de l'état lié de trois bosons interagissant par des potentiels locaux. Ce problème peut être considéré comme un banc d'essai des méthodes pour l'étude du triton. Il peut aussi être considéré comme le premier ordre de sa solution, car on peut montrer l'équivalence des deux problèmes si les interactions triplet pair et singulet pair sont égales. Cette situation a lieu pour le potentiel de Brink et Bocker B1.

Dans ce chapitre, en plus du formalisme qui sera utile pour la suite, nous allons essayer de trouver les possibilités et les limites des méthodes les plus courantes. Dans le chapitre suivant une autre méthode sera proposée et comparée aux précédentes. Dans le dernier chapitre cette méthode sera utilisée pour résoudre le problème du triton dans toute sa complexité.

III.1 - EQUATIONS POUR TROIS BOSONS EN INTERACTION

Nous considérons donc trois particules identiques sans spin et interagissant par les mêmes interactions. La fonction d'onde est alors symétrique dans l'échange des trois particules ou de leurs états d'impulsions et les équations de Faddeev se simplifient considérablement.

III.1.1 - Symétrie de la solution

Les équations de Faddeev pour la fonction d'onde d'un système de trois corps ont déjà été établies au chapitre I. Comme nous nous intéressons aux états liés il n'y a pas de conditions initiales et le système I 26 s'écrit :

$$1 \quad \begin{cases} |\Psi_1\rangle = G_0 T_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_2\rangle = G_0 T_2 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_3\rangle = G_0 T_3 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) \end{cases}$$

avec :

$$2 \quad |\Psi_i\rangle = G_0 V_i |\Psi\rangle \quad \text{et} \quad |\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle$$

De la relation 2 on peut déduire les deux expressions :

$$3 \quad \begin{cases} \langle \vec{p}_i \vec{q}_i | \Psi_i \rangle = \Psi_i(\vec{p}_i, \vec{q}_i) = (E + i\varepsilon - p_i^2 - q_i^2)^{-1} \int d\vec{p}_i' V(\vec{p}_i, \vec{p}_i') \langle \vec{p}_i' \vec{q}_i | \Psi \rangle \\ \Psi_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j) = (E + i\varepsilon - p_j^2 - q_j^2)^{-1} \int d\vec{p}_j' V(\vec{p}_j, \vec{p}_j') \langle \vec{p}_j' \vec{q}_j | \Psi \rangle \end{cases}$$

Nous avons omis l'indice des potentiels puisqu'ils sont identiques. Pour des bosons la fonction d'onde doit être symétrique dans l'échange des particules, c'est-à-dire que l'amplitude de trouver la particule i avec l'impulsion $\vec{q}$ en même temps que les particules j et k avec l'impulsion

relative $\vec{p}$ est la même que celle de trouver la particule j avec l'impulsion $\vec{q}$ en même temps que les particules i, k avec l'impulsion relative $\vec{p}$. C'est-à-dire :

$$4 \quad \langle \vec{p}; \vec{q}; | \Psi \rangle = \langle \vec{p}_j \vec{q}_j | \Psi \rangle \quad \text{si} \quad \vec{p}_i = \vec{p}_j, \vec{q}_i = \vec{q}_j$$

D'après la relation 3 il en résulte que :

$$\Psi_i(\vec{p}_i, \vec{q}_i) = \Psi_j(\vec{p}_j, \vec{q}_j) \quad \text{si} \quad \vec{p}_i = \vec{p}_j, \vec{q}_i = \vec{q}_j$$

C'est-à-dire finalement que nous n'avons pas trois fonctions inconnues Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 à déterminer mais une seule que nous noterons $\Psi(\vec{p}, \vec{q})$.

Cette dernière fonction a encore une symétrie que l'on peut voir sur la relation 3. En effet échanger les particules j et k revient à changer seulement le signe de leur impulsion relative (car elles n'ont pas de spin) ; par définition :

$$\Psi_i(-\vec{p}_i, \vec{q}_i) = \int (\epsilon + i\epsilon - p_i^2 - q_i^2)^{-1} V(-\vec{p}_i, -\vec{p}_i) \langle -\vec{p}_i; \vec{q}_i | \Psi \rangle d\vec{p}_i$$

De la symétrie de la fonction d'onde dans l'échange des particules j et k on déduit : $\langle -\vec{p}_j; \vec{q}_j | \Psi \rangle = \langle \vec{p}_j; \vec{q}_j | \Psi \rangle$. De la propriété de l'interaction $V_{jk} = V_{kj}$ on déduit :

$$5 \quad V(\vec{p}, \vec{p}') = V(-\vec{p}, -\vec{p}')$$

Par conséquent :

$$\Psi_i(-\vec{p}_i, \vec{q}_i) = (\epsilon + i\epsilon - p_i^2 - q_i^2)^{-1} \int V(\vec{p}_i, \vec{p}_i) \langle \vec{p}_i; \vec{q}_i | \Psi \rangle d\vec{p}_i$$

d'où la relation de symétrie :

$$6 \quad \Psi(\vec{p}, \vec{q}) = \Psi(-\vec{p}, \vec{q})$$

Du système 1 il nous suffit de garder la première équation et de la projeter dans l'espace des impulsions. Compte tenu des relations I 10 et I 12 on obtient :

$$7 \quad \Psi(\vec{p}_1, \vec{q}_1) = (E + i(\varepsilon - p_1^2 - q_1^2))^{-1} \int d\vec{p}_1' t(\vec{p}_1, \varepsilon - q_1^2, \vec{p}_1') (\Psi_2(\vec{p}_1', \vec{q}_1') + \Psi_3(\vec{p}_1', \vec{q}_1'))$$

où $\vec{p}_1', \vec{q}_1', \vec{p}_2', \vec{q}_2'$ et $\vec{p}_3', \vec{q}_3'$ sont reliés par la relation de cinématique

I 4 qui pour trois particules s'écrit :

$$8 \quad \begin{cases} \vec{p}_1' = (-\vec{p}_1 + \sqrt{3} \vec{q}_1)/2 \\ \vec{q}_1' = (-\sqrt{3} \vec{p}_1 - \vec{q}_1)/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{p}_3' = (-\vec{p}_1 - \sqrt{3} \vec{q}_1)/2 \\ \vec{q}_3' = (\sqrt{3} \vec{p}_1 - \vec{q}_1)/2 \end{cases}$$

On peut, avec ces relations, exprimer les impulsions $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ en fonction de $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2'$ et de même $\vec{p}_1', \vec{p}_3'$ en fonction de $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_3'$ - on a :

$$\begin{cases} \vec{p}_1' = -(2\vec{q}_2' + \vec{q}_1)/\sqrt{3} \\ \vec{p}_2' = (2\vec{q}_1 + \vec{q}_2')/\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{p}_1' = (2\vec{q}_3' + \vec{q}_1)/\sqrt{3} \\ \vec{p}_3' = -(2\vec{q}_1 + \vec{q}_3')/\sqrt{3} \end{cases}$$

on peut alors remplacer $d\vec{p}_1'$ par $\frac{8}{3\sqrt{3}} d\vec{q}_2'$ ou $\frac{8}{3\sqrt{3}} d\vec{q}_3'$ et l'équation 7 devient :

$$9 \quad \begin{cases} \Psi(\vec{p}_1, \vec{q}_1) = (8/(3\sqrt{3})) (E + i(\varepsilon - p_1^2 - q_1^2))^{-1} \left\{ \int d\vec{q}_2' t(\vec{p}_1, \varepsilon - q_1^2, -(2\vec{q}_2' + \vec{q}_1)/\sqrt{3}) \right. \\ \left. \dots \Psi((2\vec{q}_2' + \vec{q}_1)/\sqrt{3}, \vec{q}_1) + \int d\vec{q}_3' t(\vec{p}_1, \varepsilon - q_1^2, (2\vec{q}_3' + \vec{q}_1)/\sqrt{3}) \Psi(-(2\vec{q}_1 + \vec{q}_3')/\sqrt{3}, \vec{q}_1) \right\} \end{cases}$$

en renommant les impulsions $\vec{q}_1, \vec{q}_2'$ et $\vec{q}_3, \vec{q}_3'$ par $\vec{q}$ et $\vec{q}'$ et avec la propriété 6 le système 9 s'écrit :

$$\Psi(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{8}{3\sqrt{3} (E - p^2 - q^2 + i\varepsilon)} \int d\vec{q}' (t(\vec{p}, \varepsilon - q^2, -\frac{2\vec{q}' + \vec{q}}{\sqrt{3}}) + t(\vec{p}, \varepsilon - q^2, \frac{2\vec{q}' + \vec{q}}{\sqrt{3}})) \Psi(\frac{2\vec{q} + \vec{q}'}{\sqrt{3}}, \vec{q}')$$

Nous avons la même propriété de symétrie 5 pour Ψ que pour t . On peut alors transformer l'expression précédente pour faire apparaître la symétrie de la fonction d'onde :

$$10 \quad \Psi(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{8}{3\sqrt{3} (E - p^2 - q^2 + i\varepsilon)} \int d\vec{q}' (t(\vec{p}, \varepsilon - q^2, -\frac{2\vec{q}' + \vec{q}}{\sqrt{3}}) + t(\vec{p}, \varepsilon - q^2, \frac{2\vec{q}' + \vec{q}}{\sqrt{3}})) \Psi(\frac{2\vec{q} + \vec{q}'}{\sqrt{3}}, \vec{q}')$$

Dans cette expression on voit immédiatement que seules les interactions agissant dans les ondes paires interviendront dans la solution. Une telle équation intégrale est encore compliquée et la conservation du moment angulaire doit la simplifier.

III.1.2 - Réduction angulaire

Il y a de nombreuses méthodes pour effectuer l'analyse angulaire des équations de Faddeev. Pour le problème simple qui nous intéresse il n'est pas nécessaire de les utiliser. On admet en effet que l'interaction n'agit que dans l'onde relative $\ell = 0$. (On pourrait considérer des contributions de $\ell \geq 2$, mais on doit se rappeler que le problème de trois bosons est un modèle). On écrit alors :

$$11 \quad t(\vec{p}, E, \vec{p}') = t_0(p^2, E, p'^2) / 4\pi$$

Ceci entraîne, d'après 10, que la fonction $\Psi(\vec{p}, \vec{q})$ ne dépend que du module de $\vec{p}$ et on l'écrit $\Psi(p^2, \vec{q})$. Avec la relation 11 le système 10 devient :

$$12 \quad \Psi(p^2, \vec{q}) = \frac{4}{3\sqrt{3}\pi} \times \frac{1}{E - p^2 - q^2} \int d\vec{q}' t_0(p^2, E - q'^2, \vec{r}^2) \Psi(\vec{r}^2, \vec{q}')$$

avec

$$13 \quad \begin{cases} \vec{r}^2 = (\vec{q} + 2\vec{q}')^2 / 3 \\ \vec{r}'^2 = (2\vec{q}' + \vec{q})^2 / 3 \end{cases}$$

On peut alors décomposer $\Psi(p^2, \vec{q})$ en harmoniques sphériques de $\hat{q}$:

$$14 \quad \Psi(p^2, \vec{q}) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \Psi^{LM}(p^2, q) Y_L^M(\hat{q}) / q$$

L'intégrant $t_0(p^2, E, \vec{r}^2) \times \Psi(\vec{r}'^2, q')$ est une fonction de q, q' et du cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs (13).

On peut l'analyser en polynômes de Legendre. C'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$15 \quad t_0(p^2, E - q'^2, \vec{r}^2) \Psi(\vec{r}'^2, q') = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\hat{q}) Y_{\lambda}^{\mu*}(\hat{q}') \times 2\pi \dots$$

$$\dots \int_{-1}^1 du P_{\lambda}(u) t_0(p^2, E - q'^2, z^2) \Psi(p'^2, q')$$

avec :

$$16 \quad \begin{cases} r^2 = (q^2 + 4qq'u + 4q'^2)/3 \\ p'^2 = (4q^2 + 4qq'u + q'^2)/3 \end{cases}$$

Combinant les relations 14 et 15, et intégrant sur la direction de $\hat{q}$, la seule contribution est $\lambda = L$ et finalement on a :

$$\Psi^{LM}(p^2, q) = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{q}{E - p^2 - q^2} \int_0^\infty dq' \int_{-1}^1 du P_L(u) t_0(p^2, E - q^2, r^2) \Psi^{LM}(p'^2, q') q'$$

En prenant comme variable p'^2 au lieu de u (liés par la relation 16) et dans le cas $L = 0$, c'est-à-dire le fondamental, on retrouve l'équation devenue classique :

$$17 \quad \Psi(p^2, q) = \frac{2}{\sqrt{3} (E - p^2 - q^2)} \int_0^\infty dq' \int_{(2q-q')^2/3}^{(2q+q')^2/3} dp'^2 t_0(p^2, E - q^2, p'^2 + q^2 - q'^2) \Psi(p'^2, q')$$

Ceci est une équation intégrale sans terme inhomogène qui dépend de deux variables. Elle ne peut avoir de solutions que pour des valeurs discrètes de l'énergie. Comme nous allons le voir sa résolution est difficile.

III.2 - RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE TROIS BOSONS

On peut faire deux classes des méthodes de résolution de l'équation 17. La première comprend les méthodes de résolution que nous appellerons directes, c'est-à-dire où les approximations numériques ne sont pas guidées par la physique. La deuxième comprend les méthodes qui ramènent par des approximations de physique l'équation 17 à un système d'équations plus simples.

III.2.1 - Résolution directe de l'équation 17

Osborn (Os 67) résout le premier l'équation intégrale double 17 pour un grand nombre de potentiel. Le principe de la méthode est très simple ; pour résoudre l'équation intégrale du type :

$$18 \quad H(x, y) = g(x, y) + \int_0^\infty dy' \int_{y^2+y'^2-yy'}^{y^2+y'^2+yy'} dx' K(x, y, x', y') H(x', y')$$

on peut remplacer l'intégrale sur y' par une somme discrète de termes affectés de poids convenables. Ainsi, si on a choisi un exemple N_x de valeurs x_i pour x et N_y de valeurs y_j pour y , le système 18 devient

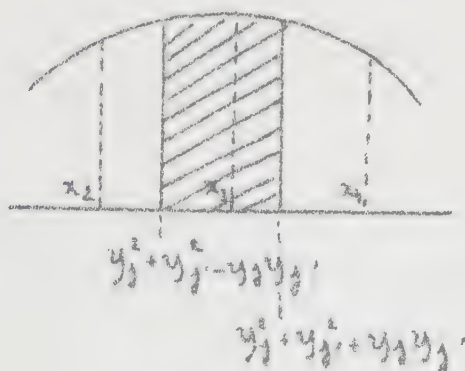
$$19 \quad H(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) + \sum_{j'=1}^{N_y} w_{j'} \int_{y_j^2+y_{j'}^2-yy_j'}^{y_j^2+y_{j'}^2+yy_j'} dx' K(x_i, y_j, x', y_{j'}) H(x', y_{j'})$$

En effet, par changement de variable l'intégrale de 0 à ∞ peut se ramener à une intégrale sur $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$ pour laquelle les méthodes de Gauss ou autres fournissent des poids appropriés. Le problème est d'exprimer la dernière intégrale en fonction des points x_i' de l'ensemble des valeurs de x pour que le système 19 devienne un système matriciel de $N_x \times N_y$ inconnues $H(x_i, y_j)$.

Ceci pose un problème car l'intervalle d'intégration peut contenir peu, ou même aucun point de l'ensemble x . Osborn résolut ce problème de la façon suivante :

pour chaque couple de valeurs de y , $(y_j, y_{j'})$, il choisit les points x_i' de l'ensemble x qu'il va utiliser pour calculer l'intégrale. Soit donc $i'_{\min} \leq i' \leq i'_{\max}$. Parmi ces points il s'en trouve généralement qui sont à l'extérieur de l'intervalle d'intégration mais qui sont cependant utiles, si ce n'est indispensables, pour évaluer cette intégrale (figure 9).

FIGURE 9



Il choisit alors les poids d'intégration de façon que l'intégrale de la partie singulière du noyau $S_{jj'}(x')$ (qu'il a pu isoler) multipliée par x'^m soit exacte. C'est-à-dire qu'il résout le système :

$$\int_{y_j^i + y_j^i - y_j y_{j'}}^{y_j^i + y_j^i + y_j y_{j'}} dx' S_{jj'}(x') x'^m = \sum_{i'=i_{\min}}^{i_{\max}} W_{jj'i'} x_{i'}^m S_{jj'}(x_{i'})$$

En choisissant les polynômes $1, x, \dots, x^{i_{\max} - i_{\min} - 1}$ il calcule avec toute la précision nécessaire l'intégrale du membre de gauche de la relation 20 et pour chaque couple jj' il obtient les poids $W_{jj'i'}$ nécessaires à l'intégrale sur x' .

Il est donc nécessaire d'effectuer $N_x \times N_y \times n$ intégrales précises et de résoudre $N_y \times N_y$ systèmes linéaires de rang n si n est le nombre moyen de points utilisés pour l'intégrale sur x' .

(Comme ordre de grandeur $N_y = 10 \quad n = 5$).

Une autre méthode de résolution directe a été proposée par Kim (Ki 59). Comme Osborn, il remplace l'intégration sur y' par une somme discrète utilisant un certain ensemble de valeurs y_j . Pour l'intégration sur x' il choisit les poids de la méthode de discrétisation de façon que les intégrales du produit du noyau par un ensemble de fonctions linéairement indépendantes soient exactes. Ou encore :

$$21 \quad \int_{y_j^i + y_j^i - y_j y_{j'}}^{y_j^i + y_j^i + y_j y_{j'}} dx' K(x_i, y_j, x', y_{j'}) f_m(x') = \sum_{i'=1}^{N_x} W_{ij'ij'} K(x_i, y_j, x_{i'}, y_{j'}) f_m(x_{i'})$$

Si la solution peut être correctement représentée par ces fonctions f_m , alors la discrétisation de l'intégrale est correcte, et comme pour la méthode précédente on est ramené à un système linéaire pour les inconnues $H(x_i, y_j)$.

Finalement la méthode d'Osborn est un cas particulier de cette méthode avec comme fonctions linéairement indépendantes de simples poly-

nômes. Cependant l'utilisation systématique des N_x points pour l'intégrale sur x' dans la méthode de Kim est dangereuse * si l'intervalle est trop petit ; d'autre part les résultats obtenus dépendent cruciallement du choix des fonctions linéairement indépendantes.

En résumé ces deux méthodes déterminent la solution sous la forme d'un tableau de valeurs obtenues par résolution d'un système linéaire de rang $(N_x \times N_y)$. Pour le calcul de chaque élément de cette matrice on doit calculer n intégrales correctement et résoudre un système de rang n . Chacune de ces intégrales nécessite la connaissance complète de la matrice de transition y compris en dehors de la couche d'énergie. Cette matrice, fonction de trois variables, nécessite la résolution préalable de l'équation de Lippman-Schwinger.

L'exactitude de la méthode dépend de l'aptitude des fonctions linéairement indépendantes f_m à représenter la solution et des nombres de points N_x et N_y choisis, nécessairement limités par la taille des ordinateurs. Cette dernière question est cruciale comme l'ont montré Humberston, Hall et Osborn (Hu 68) en comparant pour de forts potentiels la solution "Faddeev" à la solution "variationnelle".

Une autre méthode de résolution directe des équations de Faddeev a été proposée par Malfliet et Tjon (Ma 69). Le principe est d'itérer les équations de Faddeev. On montre en effet que la solution itérée d'ordre $n+1$ est proportionnelle à celle d'ordre n lorsque n est grand, et que l'on est à l'énergie de liaison si ce rapport est égal à l'unité. Comme les précédentes cette méthode nécessite une double discrétisation et le problème de l'intégrale sur y' est résolu par une simple interpolation linéaire. Elle nécessite aussi pour chaque énergie d'essai un nombre d'itérations voisin de 10. Cependant sa simplicité et l'absence de matrice à inverser ont permis son emploi pour l'étude du triton. Cependant la solution obtenue donne un facteur de forme électrique erroné, ce qui semble dû à la discrétisation des intégrales (Ja 71).

* instabilité due à l'utilisation de points extérieurs à l'intervalle d'intégration avec des poids importants et destructifs.

III.2.2 - Résolutions par des approximations guidées par le problème physique

Comme on l'a vu au chapitre I, résoudre les équations de Faddeev avec des interactions séparables de rang un, revient à résoudre un système d'équations intégrales simples. Ce problème est d'un ordre de difficulté inférieur à celui de la résolution directe pour un potentiel local où il s'agit d'intégrales à deux dimensions. Ceci provient de ce qu'un potentiel séparable donne une matrice de transition séparable. On peut alors envisager de chercher à rendre séparable la matrice de transition, même pour un potentiel local. Ceci est toujours possible pour des énergies voisines de celles des états liés ou résonances dues à ce potentiel et Lovelace (Lo 64) a proposé d'utiliser cette propriété dans la résolution des équations de Faddeev. Cependant dans le problème à trois corps on a besoin de la matrice de transition dans un grand domaine d'énergie, exactement de E (énergie libre des trois corps) à $-\infty$ et l'approximation de dominance du pôle du ou des états liés est discutable. D'autre part cette approximation ne présente pas la coupure dont on a déjà parlé au chapitre I et on pense que ce non respect de l'unitarité dans le problème à deux corps a de lourdes repercussions sur celui à trois corps. Basdevant (Ba 66) a cependant rendu unitaire une telle approximation et l'a utilisée pour un modèle de résonance de trois pions. D'autres approximations (Bo 65, Ko 65, Br 69) séparables de rang un ou deux ont été proposées depuis qui sont valables dans un grand domaine d'énergie et qui sont partiellement ou même complètement unitaires. De ces méthodes on ne peut attendre que des renseignements qualitatifs et à ce titre la méthode du potentiel séparable de Yamaguchi, où il n'y a même pas de problème d'unitarité, est plus simple et aussi valable. Finalement ces approximations à nombre fini de termes ne peuvent donc être envisagées pour étudier le triton.

Un autre type d'approximation séparable avec un nombre infini de termes est fondée sur la méthode des quasi particules de Weinberg (We 63). Il montra en effet qu'une interaction à courte portée peut se développer selon :

$$22 \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} V | \Psi_n(E) \rangle \langle \widetilde{\Psi}_n(E) | V / \langle \widetilde{\Psi}_n(E) | V | \Psi_n(E) \rangle$$

où les états de quasi particules $|\Psi_n(E)\rangle$ satisfont l'équation :

$$23 \quad (E - H_0)^{-1} V |\Psi_n(E)\rangle = \gamma_n(E) |\Psi_n(E)\rangle$$

c'est-à-dire que pour des énergies négatives $\gamma_n(E)$ est le facteur par lequel il faut diviser le potentiel pour qu'il puisse lier le système à l'énergie E . Le calcul de l'opérateur de transition est très simple d'après I 11 et 22 :

$$T(E) = V + V G_0(E) T(E) = \sum_n V |\Psi_n(E)\rangle \left\{ \frac{\langle \tilde{\Psi}_n(E) | V + \langle \tilde{\Psi}_n(E) | V G_0(E) T(E) \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_n(E) | V | \Psi_n(E) \rangle} \right\}$$

et d'après 23 :

$$T(E) = \sum_n \frac{V |\Psi_n(E)\rangle}{\langle \tilde{\Psi}_n(E) | V | \Psi_n(E) \rangle} \left\{ \langle \tilde{\Psi}_n(E) | V + \gamma_n(E) \langle \tilde{\Psi}_n(E) | T(E) \rangle \right\}$$

ou encore :

$$24 \quad T(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V |\Psi_n(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_n(E) | V}{\langle \tilde{\Psi}_n(E) | V | \Psi_n(E) \rangle (1 - \gamma_n(E))}$$

Avec un tel développement nous retrouvons les avantages du potentiel séparable et donc une certaine simplification des équations de Faddeev et de leur résolution. Il est cependant important de savoir combien de termes il est nécessaire de garder dans le développement 24. Il a été montré (Ka 69) que pour des potentiels qui sont moins singuliers que r^{-2} à l'origine la série 24 converge uniformément en fonction de chaque variable pour tout moment orbital. Un tel développement a été utilisé pour trois bosons liés par le puits carré, le potentiel de Hulthén $V(r) = \lambda / (e^r - 1)$ et le potentiel $V = -2 \hbar^2 / m a^2 (r)$ pour lesquels les solutions de l'équation 21 peuvent être écrites latéralement. Des calculs ont été faits par Ball et Wong (Ba 68), Kharchenko (Ka 68), Koh (Ko 69) mais aucun test n'a été effectué pour déterminer si le nombre de termes du développement 12 était suffisant. La difficulté apparente d'obtenir ces états de quasi-particules pour des potentiels réalistes et le problème de la convergence ont empêché l'utilisation de cette méthode pour le problème du triton.

Si on essaye de comparer la dernière méthode avec les méthodes directes on peut remarquer qu'elles sont presque équivalentes. En effet, les méthodes directes, comme la méthode de Weinberg, consistent à projeter la solution sur un ensemble de fonctions linéairement indépendantes. Elles peuvent être des polynômes, des fonctions mathématiques arbitraires ou les états de quasi-particules. Dans le dernier cas on peut considérer qu'une partie de la physique est contenue dans ces fonctions * et qu'elles représentent en un sens le meilleur des choix. Ainsi à nombre de valeur N_y de y' égal au nombre de termes du développement 24 utilisés, on peut s'attendre à un meilleur résultat avec ce dernier.

Nous allons cependant présenter dans la suite une autre méthode ayant une certaine relation avec la dernière mais qui semble beaucoup plus prometteuse et est fondée sur un développement séparable, c'est-à-dire analogue à celui de T mais pour la fonction de Green.

* On peut noter en particulier qu'elles donnent par construction le comportement asymptotique exact pour la fonction d'onde à trois corps.

CHAPITRE IV

EQUATIONS DE FADDEEV POUR DES POTENTIELS LOCAUX :

UNE AUTRE METHODE

Nous avons vu au chapitre précédent les caractéristiques des méthodes les plus connues pour résoudre les équations de Faddeev. Nous avons vu aussi que les méthodes qui utilisent un développement séparable de la matrice de transition à deux corps au moyen d'approximations guidées par la physique du problème sont plus intéressantes et ceci sera examiné plus en détail. Dans ce chapitre nous allons proposer une autre manière d'envisager le problème. Nous allons montrer en effet que les équations de Faddeev peuvent se formuler très simplement en un système intégrodifférentiel, ou, ce qui revient au même, en un système d'équations différentielles simples couplées. Cette formulation a de nombreux avantages :

- Tout d'abord ce système est écrit dans l'espace de configuration. Dans cet espace qui nous est d'ailleurs plus familier les interactions locales ont une représentation plus simple que dans l'espace des impulsions. D'autre part cet espace est naturellement limité par la portée des interactions (modèle on peut construire simplement la solution comme nous le verrons), et de plus il est le plus approprié pour traiter avantageusement les potentiels singuliers comme ceux ayant un coeur dur.
- Le deuxième avantage important est que seul le potentiel apparaît dans cette formulation (et ceci dans l'espace de configuration) et non pas la matrice de transition qui, elle, nécessite un calcul préalable souvent très compliqué pour des potentiels réalistes.
- Le troisième avantage est d'ordre numérique, on peut attendre une précision bien meilleure d'une équation différentielle que d'une équation

tion intégrale. En effet pour une équation intégrale la solution est obtenue en un point en fonction de tous les autres points, et ceci conduit à garder en mémoire des matrices de rang N , si N est le nombre de points de discrétisation. Pour une équation différentielle la solution s'obtient en un point en fonction de quelques points voisins et on peut choisir un pas de progression aussi fin que l'on veut sans être limité par la taille de l'ordinateur. On peut alors obtenir la solution avec la précision désirée au prix du temps correspondant. Ainsi nous verrons dans la suite que nous avons remplacé une équation intégrale, que l'on résout avec environ 10 points, par une équation différentielle résolue avec 300 et même 500 points, c'est-à-dire avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} .

Pour résoudre un tel système d'équations différentielles couplées en grand nombre, on doit utiliser des méthodes de relaxation c'est-à-dire des méthodes qui, par itérations successives, améliorent une solution d'essai d'ordre séro. La convergence d'une telle méthode est d'autant plus rapide que la solution de départ est voisine de la solution exacte.

Ce chapitre comprend donc trois parties :

- La première décrit une méthode pour obtenir une bonne solution de départ.
- Dans la deuxième on trouvera la dérivation du système intégral-différentiel et la description de la méthode de relaxation.
- La troisième partie compare les résultats obtenus pour l'état lié de trois bosons par le potentiel de Yukawa et de trois nucléons interagissant par le potentiel de Bunk et Bocker, par la méthode proposée et par celle décrite à la fin du chapitre précédent.

IV.1 - RECHERCHE DE LA SOLUTION D'ORDRE ZERO

Dans les équations de Faddeev c'est en fait l'opérateur $G_0 T_1$ qui intervient plutôt que T_1 seul. Cet opérateur peut aussi se mettre sous la forme $G_1 V_1$ d'après I 13. En établissant une approximation séparable de la fonction de Green G_1 les équations de Faddeev se réduiront autant que pour une matrice de transition T_1 séparable, c'est-à-dire de la même manière que pour le potentiel de Yamaguchi. Dans la suite nous rappelons les propriétés d'états introduits il y a longtemps par Kapur et Peierls (Ka 38) qui permettent de construire une fonction de Green séparable.

VI.1.1 - Les états de Kapur-Peierls

Considérons un potentiel local, sphérique, réel et indépendant des spins pour clarifier l'exposé. Les états de Kapur Peierls $\Psi_\alpha(\vec{r}, E)$ sont des fonctions continues à dérivées premières continues solutions des équations :

$$1 \quad \begin{cases} (E_\alpha(E) - H) \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = 0 & r \leq a \\ (E - H) \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = 0 & r > a \end{cases}$$

qui sont régulières à l'origine et se comportent à l'extérieur comme des ondes sortantes (à décroissance exponentielle si $E < 0$). Cette définition diffère un petit peu de l'originale dans le fait que le potentiel n'est pas supposé nul pour $r > a$.

De telles solutions n'existent que pour des valeurs discrètes de E où ℓ caractérise le moment orbital et le nombre de noeuds, soit :

$$2 \quad \Psi_\alpha(r, E) = i^\ell u_{\ell\ell}(r, E) Y_\ell^m(\hat{r}) / r$$

$$3 \quad \begin{cases} (E_{\ell\ell}(E) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)) u_{\ell\ell}(r, E) = 0 & r \leq a \\ (E + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)) u_{\ell\ell}(r, E) = 0 & r > a \end{cases}$$

et les conditions

$$4 \quad \begin{cases} u_{n\ell}(r=0, E) = 0 \\ u_{n\ell}(r \rightarrow \infty, E) \sim e^{i\sqrt{E}r} \end{cases}$$

Les états de Kapur Peierls ont un certain nombre de propriétés que nous allons rappeler :

a) On peut définir un produit direct :

Considérons deux états pour la même énergie et ayant le même moment orbital, on a les relations :

$$(E_{n\ell}(E) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)) u_{n\ell}(r, E) = 0$$

$$(E_{n'\ell}(E) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)) u_{n'\ell}(r, E) = 0$$

Si on multiplie la première équation par $u_{n'\ell}(r, E)$, la seconde par $u_{n\ell}(r, E)$ que l'on fasse alors leur différence et que l'on intègre de 0 à a il vient :

$$(E_{n\ell}(E) - E_{n'\ell}(E)) \int_0^a u_{n\ell}(r, E) u_{n'\ell}(r, E) dr + W(u_{n\ell}(r, E), u_{n'\ell}(r, E), a) = 0$$

Les deux derniers termes s'annulent puisque $u_{n\ell}$ et $u_{n'\ell}$, satisfaisant dans la région extérieure la même équation différentielle et les mêmes conditions à l'infini, sont proportionnelles. Donc si $E_{n\ell} \neq E_{n'\ell}$ on a :

$$5 \quad \int_0^a u_{n\ell}(r, E) u_{n'\ell}(r, E) dr = 0$$

Introduisons alors $\tilde{\Psi}_\alpha(E)$ qui est le renversé dans le temps de $\Psi_\alpha(E)$

$$\tilde{\Psi}_\alpha(r, E) = i^\ell u_{n\ell}(r, E) Y_\ell^m(\hat{r}) / r$$

alors la relation 5 devient :

$$6 \quad (\tilde{\Psi}_\alpha(E) | \Psi_{\alpha'}(E)) = \delta_{\alpha\alpha'} (\tilde{\Psi}_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E)) = \delta_{\alpha\alpha'}$$

* On convient de prendre pour $\sqrt{E}$ la détermination dont l'argument est compris entre 0 et π .

où le symbole $(\int)$ signifie l'intégration dans la sphère de rayon a .
 Dans la suite nous supposons ces états normalisés $(\Psi_\alpha | \Psi_\alpha) = 1$

- b) Les énergies propres E_{nl} sont réelles si E est négatif sinon leur partie imaginaire est négative. Considérons en effet :

$$(E_{nl}(E) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r)) u_{nl}(r, E) = 0$$

$$(E_{nl}^*(E) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r)) u_{nl}^*(r, E) = 0$$

Nous refaisons alors le même raisonnement que le précédent (méthode du Wronskien) et on obtient :

$$(E_{nl}(E) - E_{nl}^*(E)) \int_0^a |u_{nl}(r, E)|^2 dr + W(u_{nl}(r, E), u_{nl}^*(r, E), a) = 0$$

Le wronskien pour $r > a$ est indépendant du rayon car u_{nl} et u_{nl}^* satisfaisant dans cette région extérieure la même équation différentielle.

On peut donc l'évaluer pour $r = R$ tendant vers l'infini alors :

$$\begin{aligned} u_{nl}(r, E) &\sim e^{i\sqrt{E}r} & e^{-\sqrt{E}r} \\ u_{nl}^*(r, E) &\sim e^{-i\sqrt{E}r} \text{ pour } E > 0 \text{ ou } e^{-\sqrt{E}r} \end{aligned}$$

c'est-à-dire si $E \leq 0$, le wronskien est nul et E_{nl} est réelle ; sinon le wronskien devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |u_{nl}(R, E)|^2 \times 2i\sqrt{E}$$

d'où

$$7 \quad E_{nl}(E) - E_{nl}^*(E) = -2i\sqrt{E} \lim_{R \rightarrow \infty} |u_{nl}(R, E)|^2 / \int_0^a |u_{nl}(r, E)|^2 dr$$

La partie imaginaire de E_{nl} est donc négative.

- c) L'équation $E_{nl}(E) = E$ a pour solution les états liés et les résonances.

En effet, d'après la relation 1 $\Psi_\alpha(E)$ satisfait la même équation

dans tout l'espace et se comporte asymptotiquement comme une onde exponentiellement décroissante ou sortante :

$$\Psi(\vec{r}, E_\alpha) \sim e^{i\sqrt{E_\alpha + i\epsilon} r} / r$$

Ceci est la définition de Humblet et Rosenfeld (Hu 61) d'un état lié ou d'une résonance.

On peut donc obtenir ces solutions par intersection des courbes $E_\alpha(E)$, que nous appellerons dans la suite trajectoires, avec la première bissectrice. Pour des énergies positives réelles, il n'est pas possible, d'après 7, d'avoir $E_\alpha(E) = E$. Mais si le potentiel est tel qu'il puisse y avoir des résonances, celles-ci se trouveront près de l'énergie telle que $\text{Réel } E_\alpha(E) = E$. De telles trajectoires sont présentées sur la figure ci-dessous pour deux potentiels.

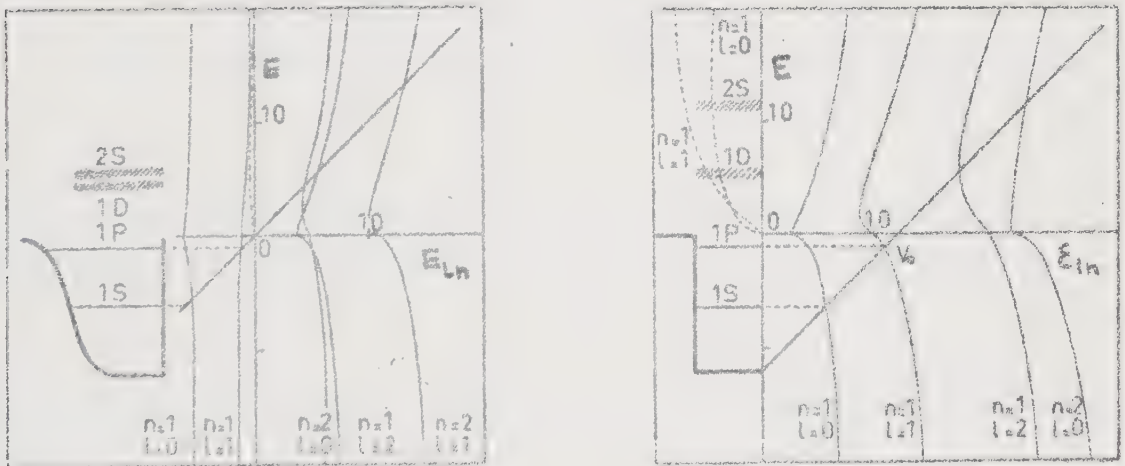


FIGURE 10 : Trajectoires des états de Kapur-Peierls. Pour le puits carré on a porté $\xi_{\ell n} = E_{\ell n} - V_0$ qui est indépendant de V_0 . En pointillé est tracé la partie imaginaire de $E_{\ell n}$. Les régions hachurées n'indiquent pas vraiment une résonance mais plutôt un déphasage voisin de $\pi/2$.

- d) Les états de Kapur Peierls ont aussi l'importante propriété de former un ensemble complet de fonctions linéairement indépendantes dans l'espace des fonctions définies dans l'intervalle $a-a$ régulières à

l'origine et ayant même dérivée logarithmique en a que u_ℓ solution sortante de :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) u_\ell(r) = 0$$

Comme les états propres de H , la base des états de Kapur Peierls diagonalise l'hamiltonien. Elle a cependant l'avantage, grâce à sa dépendance en énergie, de ne pas avoir de spectre continu. Elle a aussi l'avantage sur d'autres bases comme celle de l'oscillateur harmonique de donner même avec un nombre fini de termes une fonction qui a un comportement extérieur correct ou encore de limiter le domaine de projection à l'intervalle $[0, a]$ et de traiter exactement la région extérieure. Ceci est particulièrement important dans les problèmes de diffusion.

IV.1.2 - La fonction de Green

Supposons que l'on recherche la solution purement sortante de :

$$8 \quad (E - H) \chi = W \phi$$

où $W \phi$ est un terme inhomogène quelconque mais supposé nul pour $r > a$. Par définition de la fonction de Green cette solution s'écrit :

$$9 \quad \chi = G W \phi$$

Si on développe χ et $W \phi$ sur les états propres du moment orbital, l'équation 8 devient :

$$10 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) \chi_\ell^m(r) = (r | W \phi)_\ell^m$$

avec :

$$\chi(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell \chi_\ell^m(r) Y_\ell^m(\hat{r}) / r$$

$\chi_\ell^m(r)$ doit être régulière à l'origine et puisque par hypothèse le terme inhomogène est nul pour $r > a$, $\chi_\ell^m(r)$ est la solution sortante de :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) \chi_\ell^m(r > a) = 0$$

l'origine et ayant même dérivée logarithmique en a que la solution sortante de :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) u_\ell(r) = 0$$

Comme les états propres de H , la base des états de Kapur Peierls diagonalise l'hamiltonien. Elle a cependant l'avantage, grâce à sa dépendance en énergie, de ne pas avoir de spectre continu. Elle a aussi l'avantage sur d'autres bases comme celle de l'oscillateur harmonique de donner même avec un nombre fini de termes une fonction qui a un comportement extérieur correct ou encore de limiter le domaine de projection à l'intervalle $[0, a]$ et de traiter exactement la région extérieure. Ceci est particulièrement important dans les problèmes de diffusion.

IV.1.2 - La fonction de Green

Supposons que l'on recherche la solution purement sortante de :

$$8 \quad (E - H) \chi = W \phi$$

où $W \phi$ est un terme inhomogène quelconque mais supposé nul pour $r > a$. Par définition de la fonction de Green cette solution s'écrit :

$$9 \quad \chi = G W \phi$$

Si on développe χ et $W \phi$ sur les états propres du moment orbital, l'équation 8 devient :

$$10 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) \chi_\ell^m(r) = (r | W \phi)_\ell^m$$

avec :

$$\chi(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell \chi_\ell^m(r) Y_\ell^m(\hat{r}) / r$$

$\chi_\ell^m(r)$ doit être régulière à l'origine et puisque par hypothèse le terme inhomogène est nul pour $r > a$, $\chi_\ell^m(r)$ est la solution sortante de :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) \chi_\ell^m(r > a) = 0$$

Nous sommes donc placés dans le cas du paragraphe d) et on peut projeter χ_l^m sur les états de Kapur Peierls pour l'énergie E :

$$11 \quad \chi_l^m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_{nl}(r, E)$$

ou encore d'après 2 :

$$\chi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, E)$$

Les coefficients a_{α} de la projection seront déterminés par l'équation 6

$$(E - H) \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, E) = W \Phi$$

Avec les propriétés 1 et 6, on a immédiatement :

$$a_{\alpha} = (\tilde{\Psi}_{\alpha} | W \Phi) / (E - E_{\alpha}(E))$$

ou encore, d'après 9 :

$$|X\rangle = G W \Phi = \sum_{\alpha} |\Psi_{\alpha}(E)\rangle (\tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W \Phi) / (E - E_{\alpha}(E))$$

c'est-à-dire que si la fonction de Green agit sur une fonction nulle en dehors d'une sphère de rayon a on peut la développer en une somme infinie de termes :

$$12 \quad G(E) = \sum_{\alpha} \frac{|\Psi_{\alpha}(E)\rangle (\tilde{\Psi}_{\alpha}(E) |}{(E - E_{\alpha}(E))}$$

Ce développement a été étudié d'une manière générale (Gi 71). On trouve essentiellement que l'on a une très bonne représentation de la fonction de Green avec trois états de Kapur Peierls, pour chaque moment orbital et ceci pour un grand domaine d'énergie, si l'on considère un puits carré ou un potentiel de Saxon Wood. Ceci sera d'ailleurs vérifié dans l'utilisation du développement 12 pour les équations de Faddeev. Dans ces équations il arrive que l'on utilise la fonction de Green au voisinage d'un pôle ou d'un état lié et nous devons vérifier que le comportement du développement est correct.

Pour cela nous allons établir une relation utile. Considérons l'état de Kapur Peierls $n\ell$ pour deux énergies E_1 et E_2 . Par le raisonnement habituel du wronskien, et partant des équations 3 on obtient :

$$13 \quad (E_{n\ell}(E_1) - E_{n\ell}(E_2)) \int_0^a u_{n\ell}(r, E_1) u_{n\ell}(r, E_2) dr + W(u_{n\ell}(r, E_1), u_{n\ell}(r, E_2), a) = 0$$

$$14 \quad (E_1 - E_2) \int_0^R u_{n\ell}(r, E_1) u_{n\ell}(r, E_2) dr + W(u_{n\ell}(r, E_1), u_{n\ell}(r, E_2), R) - W(u_{n\ell}(r, E_1), u_{n\ell}(r, E_2), a) = 0$$

où

On peut alors additionner ces deux relations et faire tendre E_1 et E_2 vers E . Pour R assez grand on obtient à partir du comportement asymptotique 4

$$\lim_{E_1 \rightarrow E_2} \frac{W(u_{n\ell}(r, E_1), u_{n\ell}(r, E_2), R)}{E_1 - E_2} = \frac{u_{n\ell}^2(R, E) i}{2\sqrt{E}}$$

d'où l'on déduit :

$$15 \quad \frac{\partial E_{n\ell}(E)}{\partial E} \int_0^a u_{n\ell}^2(r, E) dr + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u_{n\ell}^2(r, E) dr + \frac{i u_{n\ell}^2(R, E)}{2\sqrt{E}} = 0$$

Pour des énergies négatives, la fonction décroît exponentiellement à l'infini et cette relation peut aussi s'écrire (pour $E < 0$ u peut être pris réel et $\tilde{\Psi}_\alpha = \Psi_\alpha$)

$$\frac{\partial E_\alpha(E)}{\partial E} (\Psi_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E)) + \langle \Psi_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E) \rangle = \langle \Psi_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E) \rangle = 0$$

où, d'après le choix de la norme des états :

$$16 \quad \frac{\partial E_\alpha(E)}{\partial E} = 1 - \langle \Psi_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E) \rangle$$

Pour une énergie E voisine de E_0 , énergie de liaison caractérisée par les nombres quantiques α_0 , on sait d'après le paragraphe c) que :

$$E_{\alpha_0}(E_0) = E_0$$

$$17 \quad E_{\alpha_0}(E) \simeq E_0 + (E - E_0) \left. \frac{\partial E_{\alpha_0}(E)}{\partial E} \right|_{E=E_0}$$

Alors en utilisant 17 dans le développement 12 de la fonction de Green on obtient :

$$G(E, E_0) \approx \frac{|\Psi_{\alpha_0}(E_0)\rangle \langle \Psi_{\alpha_0}(E_0)|}{(E - E_{\alpha_0}(E))} = \frac{|\Psi_{\alpha_0}(E_0)\rangle \langle \Psi_{\alpha_0}(E_0)|}{(E - E_0) \left(1 - \frac{\partial E_{\alpha_0}(E_0)}{\partial E}\right)}$$

et d'après 16 :

$$18 \quad G(E) \approx \frac{|\Psi_{\alpha_0}(E_0)\rangle \langle \Psi_{\alpha_0}(E_0)|}{(E - E_0) \langle \Psi_{\alpha_0}(E_0) | \Psi_{\alpha_0}(E_0) \rangle}$$

On retrouve le comportement attendu : pôle pour l'état lié et comme résidu le produit extérieur de l'état lié par lui-même. Cette relation peut être généralisée (Gi 71) pour les résonances et on retrouve l'équation obtenue antérieurement par Minelli et Zardi (Mi 70) à partir des travaux de Humblet.

IV.1.3 - Détermination pratique des états de Kapur-Peierls

Comme les états liés, les états de Kapur Peierls satisfont un principe variationnel. Considérons en effet les fonctions continues à dérivée première continue qui se raccordent (fonction et dérivée première) à la solution sortante de :

$$(E - H)\Psi = 0$$

autrement dit ces fonctions ont toutes la même dérivée logarithmique au rayon de raccordement. Considérons alors la quantité :

$$\bar{E} = \frac{(\Psi | H | \Psi)}{(\Psi | \Psi)}$$

où Ψ est une fonction quelconque et où le symbole $(|)$ indique encore l'intégration dans la région intérieure. Cherchons alors quelle condition doit satisfaire Ψ pour que cette expression soit stationnaire.

On a évidemment :

$$0 = (\delta\Psi | H - \bar{E} | \Psi) + (\Psi | H - \bar{E} | \delta\Psi)$$

Par hypothèse toutes les fonctions Ψ , donc aussi $\delta\Psi$, ont même dérivée logarithmique ; il s'ensuit, par le théorème de Green, que

$$(\Psi|\Delta|\delta\Psi) = (\Delta\Psi|\delta\Psi) \quad \text{et évidemment} \quad (\Psi|V|\delta\Psi) = (\delta\Psi|V\Psi)$$

ou autrement dit que l'hamiltonien est hermitique dans cet espace de fonctions. Il s'en suit que Ψ doit satisfaire les équations :

$$(\bar{E} - H)\Psi = 0 \quad r \leq a$$

$$(E - H)\Psi = 0 \quad r > a$$

Ψ est donc un état de Kapur Peierls et $\bar{E}$ son énergie propre.

Les états de Kapur Peierls sont donc aussi faciles à obtenir que les états liés. En effet, soit à chercher la solution continue à dérivée première continue de :

$$19 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E_{n\ell}(E) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) u_{n\ell}(r, E) = 0 \quad r \leq a$$

$$20 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r) \right) u_{n\ell}(r, E) = 0 \quad r > a$$

On résout l'équation 20 en partant de $R \gg a$ où la solution $u_{\ell}(r)$ est purement sortante jusqu'à $r = a$. On obtient ainsi la dérivée logarithmique pour $a : L = u'_{\ell}(a, E)/u_{\ell}(a, E)$. On se donne alors une énergie d'essai $E_{n\ell}^0$ et on résout l'équation 19 en partant de l'origine où la solution est nulle. Cette solution $u_{n\ell}^0(r)$ a une dérivée logarithmique $L_0 \neq L$, mais par les propriétés de wronskien on établit facilement la relation :

$$(E_{n\ell} - E_{n\ell}^0) \int_0^a u_{n\ell}(r, E) u_{n\ell}^0(r, E) dr + u_{n\ell}^0(a, E) u_{n\ell}(a, E) (L - L_0) = 0$$

On ne connaît pas $u_{n\ell}$ mais on la suppose peu différente de $u_{n\ell}^0$; on obtient donc la correction à apporter à l'énergie d'essai $E_{n\ell}^0$ et on recommence avec $E_{n\ell}^1$.

Cette méthode converge d'autant plus vite que l'énergie de départ est bien choisie. Pour cela il est avantageux de déterminer une fois pour toutes les trajectoires $E_{n\ell}(E)$ qui, peu structurées (figure 10), peuvent être décrites par un nombre réduit de valeurs. La détermination de ces trajectoires se fait rapidement, soit en répétant la méthode précédente pour un certain nombre de valeurs de E , soit par réso-

lution d'une équation différentielle du premier ordre à laquelle elles obéissent (G1 71).

Pour des grandes valeurs de ℓ et de n on peut choisir comme valeur de départ les valeurs extrapolées suivantes :

$$E_{n\ell}^0(E) = 2 E_{n\ell-1}(E) - E_{n\ell-2}(E)$$

$$E_{n\ell}^0(E) = 2 E_{n-1,\ell}(E) - E_{n-2,\ell}(E)$$

Finalement connaissant les trajectoires, la détermination pour une énergie des états de Kapur Peierls est aussi rapide que celles de l'oscillateur harmonique, ce qui a son importance, car c'est pour un grand domaine d'énergie que nous avons besoin de la fonction de Green donc des états de Kapur Peierls dans le problème à trois corps.

IV.1.4 - Un autre développement séparable de la fonction de Green

On peut construire un autre développement séparable de la fonction de Green à partir des solutions du problème de Sturm Liouville, c'est-à-dire les solutions de :

$$21 \quad (H_0 + V_\alpha(E)) \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = E \Psi_\alpha(\vec{r}, E)$$

qui se comportent asymptotiquement comme $e^{+i\sqrt{E}r/r}$

H_0 est encore l'opérateur énergie cinétique et V le potentiel.

Un tel problème n'admet de solution que pour des valeurs discrètes du moment orbital (V est sphérique), du nombre de nœuds et de λ . Ces états sont donc les états de quasi-particules de Weinberg (We 63).

Dans la mesure où le potentiel garde un signe constant, on peut démontrer (Mo 55) que ces solutions forment une base pour les fonctions satisfaisant aux mêmes conditions aux limites. On peut donc projeter la solution sortante X de

$$(E - H_0 - V) X = W\phi$$

sur les états de Sturm Liouville

$$X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha}(E)$$

alors :

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} (\lambda_{\alpha}(E) - 1) |\Psi_{\alpha}(E)\rangle = |W\Phi\rangle$$

et en utilisant la relation facile à démontrer (méthode du Wronskien) :

$$\langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | V | \Psi_{\alpha}(E) \rangle = \delta_{\alpha\alpha} \cdot \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | V | \Psi_{\alpha}(E) \rangle$$

il vient :

$$|X\rangle = \sum_{\alpha} \frac{|\Psi_{\alpha}(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W\Phi \rangle}{(\lambda_{\alpha}(E) - 1) \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | V | \Psi_{\alpha}(E) \rangle}$$

d'où un développement de la fonction de Green en choisissant la norme de ces états telle que $\langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | V | \Psi_{\alpha}(E) \rangle = 1$

$$22 \quad G(E) = \sum_{\alpha} \frac{|\Psi_{\alpha}(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E)|}{\lambda_{\alpha}(E) - 1}$$

A partir du développement 22 on peut obtenir un développement de l'opérateur de transition par la relation $G_0 T = GV$ ou $T = (E - H_0) GV$, et d'après la relation 21 :

$$23 \quad T(E) = \sum_{\alpha} \frac{V |\Psi_{\alpha}(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | V}{(1 - \lambda_{\alpha}^{-1}(E))}$$

C'est donc le développement de Weinberg (relation III 24).

Si le potentiel ne garde pas de signe constant, il n'est pas démontré que ces fonctions forment une base et les développements de G et de T doivent être remis en question. La détermination des états de Sturm Liouville n'est d'ailleurs pas stable et on peut trouver des valeurs de λ de signe opposé. On peut cependant partager le potentiel V en $U + W$: potentiels qui ne changent pas de signe. On définit alors les états de Sturm Liouville par :

$$(E - H_0 - U - \lambda_{\alpha}(E) W) |\Psi_{\alpha}(E)\rangle = 0$$

Il est alors facile de voir que :

$$\langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W | \Psi_{\alpha}(E) \rangle = \delta_{\alpha\alpha} \cdot \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W | \Psi_{\alpha}(E) \rangle$$

d'où l'on déduit la généralisation de 22 et 23 :

$$24 \quad \begin{cases} G(E) = \sum_{\alpha} \frac{|\Psi_{\alpha}(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E)|}{(\lambda_{\alpha}(E) - 1) \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W | \Psi_{\alpha}(E) \rangle} \\ T(E) = \sum_{\alpha} \frac{(U + \lambda_{\alpha}(E) W) |\Psi_{\alpha}(E)\rangle \langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | (U + W)}{\langle \tilde{\Psi}_{\alpha}(E) | W | \Psi_{\alpha}(E) \rangle (\lambda_{\alpha}(E) - 1)} \end{cases}$$

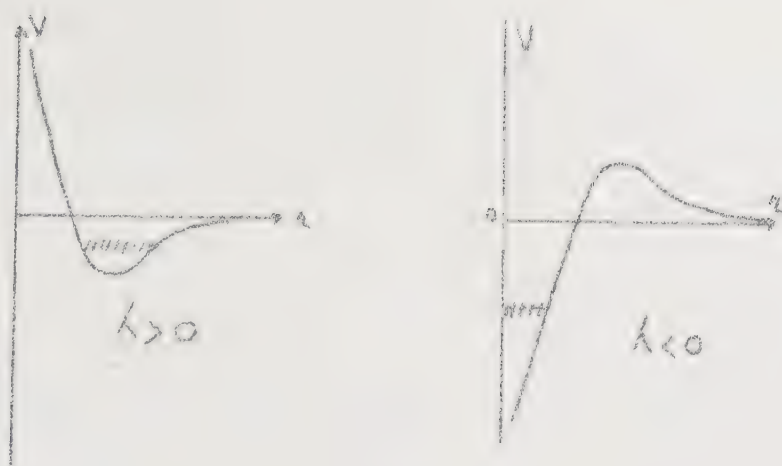


FIGURE 11 : Pour des potentiels changeants de signe, il peut y avoir des états de Sturm-Liouville caractérisés par $\lambda < 0$ et $\lambda > 0$.

IV.1.5 - Résolution des équations de Faddeev avec des fonctions de Green séparables

Nous allons voir comment se réduisent les équations de Faddeev en utilisant des fonctions de Green séparables. Pour la clarté, nous considérerons des particules sans spin interagissant entre elles par des potentiels sphériques locaux et nous utiliserons le développement 12 de la fonction de Green avec des états de Kapur-Feierle supposés normalisés à $(\tilde{\Psi}_\alpha(E) | \Psi_\alpha(E)) = 1$

Nous introduisons au préalable une base orthonormée d'ondes libres sphériques pour le mouvement relatif : Y_{jk} ou 1-23, soit donc :

$$25 \quad \sum_{\lambda_1, \mu_1} \int_0^\infty dq_1 |\lambda_1 \mu_1 q_1\rangle \langle \lambda_1 \mu_1 q_1| = 1$$

avec :

$$26 \quad \langle \vec{y}_1 | \lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{\lambda_1} q_1 j_{\lambda_1}(q_1 y_1) Y_{\lambda_1}^{\mu_1}(\hat{y}_1)$$

$$27 \quad \langle \vec{y}_1 | \lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle = (2\pi)^{-3/2} \int q_1 e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1} Y_{\lambda_1}^{\mu_1}(\hat{q}_1) d\hat{q}_1$$

La fonction de Green G_1 dans l'espace à trois corps est diagonale par rapport à ces ondes sphériques libres et on peut écrire (relation analogue à I 12) :

$$28 \quad G_1 = \sum_{\lambda_1, \mu_1} \int_0^\infty dq_1 | \lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle G_1(E - q_1^2) \langle \lambda_1 \mu_1 q_1 |$$

où $G_1(E - q_1^2)$ est la fonction de Green du système 2-3 évaluée à l'énergie disponible pour ces deux corps $\varepsilon_1 = E - q_1^2$. On peut alors utiliser le développement 12 et introduire les états de Kapur-Peierls pour le système 2-3 à cette énergie alors G_1 s'écrit :

$$29 \quad G_1 = \sum_{\lambda_1, \mu_1, \ell_1, m_1} \int_0^\infty dq_1 | \lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle \frac{\langle \Psi_{n, \ell_1}^{m_1}(\varepsilon_1) \rangle \langle \tilde{\Psi}_{n, \ell_1}^{m_1}(\varepsilon_1) |}{\varepsilon_1 - E_{n, \ell_1}(\varepsilon_1)} \langle \lambda_1 \mu_1 q_1 |$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = E - q_1^2 \\ \Psi_{n, \ell_1}^{m_1}(\vec{x}_1, \varepsilon_1) = x_1^{\ell_1} \mathcal{U}_{n, \ell_1}(x_1, \varepsilon_1) Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{x}_1)/x_1 \end{cases}$$

On introduit le moment angulaire total qui résulte du couplage de λ_1 et ℓ_1 à L , soit donc :

$$30 \quad | \lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 LM \rangle = \sum_{m_1, \mu_1} \langle \lambda_1 \mu_1 \ell_1 m_1 | LM \rangle | \lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle | \Psi_{n, \ell_1}^{m_1}(\varepsilon_1) \rangle$$

et la fonction de Green s'écrit alors :

$$31 \quad G_1 = \sum_{\ell_1, \lambda_1, n_1, L, M} \int_0^\infty dq_1 \frac{| \lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 LM \rangle \langle \lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 LM |}{\varepsilon_1 - E_{n, \ell_1}(\varepsilon_1)}$$

Considérons la première des équations de Faddeev I 26. La relation I 13 entre G_1 et T_1 permet de l'écrire :

$$32 \quad | \Psi_1 \rangle = G_1 V_1 (| \Psi_2 \rangle + | \Psi_3 \rangle)$$

Nous allons choisir un rayon de coupure pour définir les états de Kapur-Peierls tel que la contribution extérieure $x_1 > a$ de $V_1(| \Psi_1 \rangle + | \Psi_2 \rangle)$ soit négligeable ou nulle (si $V_1(x_1 > a) = 0$). Alors nous pouvons uti-

liser le développement 31 pour la fonction de Green et $|\Psi_1\rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$33 \quad |\Psi_1\rangle = \int_0^\infty dq_1 \sum_{n_1, \ell_1, \lambda_1, L, M} |\lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 L M\rangle \frac{F_{n_1 \ell_1 \lambda_1}^{LM}(q_1)}{\varepsilon_1 - E_{n_1 \ell_1}(\varepsilon_1)}$$

avec :

$$34 \quad F_{n, \ell, \lambda}^{LM}(q_1) = \langle \lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 L M | V_1 | (\Psi_2) + (\Psi_3) \rangle$$

les symboles $\langle \cdot \rangle$ signifient l'intégration sur $\vec{y}_1$ dans tout l'espace et sur $\vec{x}_1$ dans la région intérieure $x_1 \leq a$.

En utilisant dans 34 un développement analogue à 33 pour $|\Psi_2\rangle$ et $|\Psi_3\rangle$ les équations de Faddeev se ramènent au système d'équations intégrales couplées :

$$35 \quad F_{n_1 \ell_1 \lambda_1}^{LM}(q_1) = \sum_{j \neq 1} \int_0^\infty dq_j \sum_{n_j \ell_j \lambda_j} K_{n_1 \ell_1 \lambda_1, n_j \ell_j \lambda_j}^L(q_1, q_j) F_{n_j \ell_j \lambda_j}^{LM}(q_j)$$

avec

$$36 \quad K_{n_1 \ell_1 \lambda_1, n_j \ell_j \lambda_j}^L(q_1, q_j) = \langle \lambda_1 q_1 n_1 \ell_1 L M | V_i | \lambda_j q_j n_j \ell_j L M \rangle \frac{1}{\varepsilon_j - E_{n_j \ell_j}(\varepsilon_j)}$$

expression dans laquelle nous avons déjà utilisé la conservation du moment angulaire et l'invariance par rotation pour éliminer les nombres quantiques magnétiques. Ceci sera d'ailleurs vérifié plus loin.

Les équations de Faddeev sont donc ramenées à un système d'équations intégrales couplées à une variable. On a ainsi généralisé le système I 40 pour le potentiel de Yamaguchi. Il faut maintenant simplifier l'expression 36 du noyau qui contient toute la difficulté du problème à trois corps.

• Réduction du noyau

Si on introduit les harmoniques sphériques généralisées :

$$Y_{k, \ell}^{LM}(\hat{y}_i, \hat{x}_i) = \sum_{\mu_i, m_i} \langle k, \mu_i, \ell, m_i | LM \rangle Y_{k, \ell}^{\mu_i}(\hat{y}_i) Y_{\ell, m_i}^{m_i}(\hat{x}_i)$$

alors les états introduits par la relation 36 s'écrivent de manière plus compacte, d'après 27 :

$$(\vec{y}_i, \vec{x}_i | k, \ell, n, \ell, LM) = (2\pi)^{-3/2} q_i \cdot i \frac{\mu_{n, \ell}(\vec{x}_i, \vec{y}_i)}{\chi_i} \int d\hat{q}_i e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{y}_i} Y_{k, \ell}^{LM}(\hat{q}_i, \hat{x}_i)$$

Si on utilise cette forme dans l'expression du noyau, on obtient :

$$37 \left\{ \begin{aligned} K_{n, \ell, k; n', \ell', k'}^{LM}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) &= (2\pi)^{-3} q_1 q_2 (\ell_2 - E_{n', \ell'}(\ell_2))^{-1} \int d\vec{x}_1 \int d\vec{y}_1 \frac{\mu_{n, \ell}(\vec{x}_1, \vec{y}_1)}{\chi_1} \dots \\ &\dots V_1(\vec{x}_1) \mu_{n', \ell'}(\vec{x}_2, \vec{y}_2) \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1} e^{i\vec{q}_2 \cdot \vec{y}_2} \dots \\ &\dots Y_{k, \ell}^{LM}(\hat{q}_1, \hat{x}_1) Y_{k', \ell'}^{LM'}(\hat{q}_2, \hat{x}_2) \end{aligned} \right.$$

Les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ sont reliés par les transformations 1 4 et il est préférable d'exprimer tous ces vecteurs en fonction de $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ car ce sont eux qui interviennent dans le potentiel et dans les états de Kapur Peierls.

$$38 \quad \begin{aligned} \vec{x}_2 &= \alpha_j \vec{x}_1 + \beta_j \vec{y}_1 & \vec{y}_1 &= (\vec{x}_2 - \alpha_j \vec{x}_1) / \beta_j \\ \text{de} & & \text{on déduit} & \\ \vec{y}_2 &= -\beta_j \vec{x}_1 + \alpha_j \vec{y}_1 & \vec{y}_2 &= -(\vec{x}_1 - \alpha_j \vec{x}_2) / \beta_j \end{aligned}$$

ainsi que :

$$e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1} e^{i\vec{q}_2 \cdot \vec{y}_2} = e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1 - i\vec{p}_2 \cdot \vec{x}_2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{p}_1 &= (\alpha_j \vec{q}_1 - \vec{q}_2) / \beta_j \\ \vec{p}_2 &= -(\alpha_j \vec{q}_2 - \vec{q}_1) / \beta_j \end{aligned}$$

Puisque l'impulsion de la particule 1 $\vec{q}_1$ n'est pas modifiée par l'interaction V_1 , $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ représentent respectivement les impulsions relatives de j par rapport à k et de i par rapport à j après l'interaction.

L'expression 37 du noyau peut s'écrire si on remplace l'intégrale sur $\vec{y}_1$ par celle sur $\vec{x}_j$:

$$(2\pi)^{-3} \frac{q_1 q_2 (\epsilon_j - E_{n_j}(\epsilon_j))^{-1}}{|\vec{p}_j|^3} \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 \int d\vec{x}_1 \frac{u_{n_1, \epsilon_1}(\vec{x}_1, \epsilon_1) V_1(\vec{x}_1) e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1}}{\dots} \\ \dots e^{-i\epsilon_1} \sum_{LM} Y_{LM}^*(\hat{q}_1, \hat{x}_1) \int d\vec{x}_j \frac{u_{n_j, \epsilon_j}(\vec{x}_j, \epsilon_j)}{x_j} e^{-i\vec{p}_j \cdot \vec{x}_j} Y_{LM}(\hat{q}_2, \hat{x}_j)$$

On peut alors développer en ondes sphériques les ondes planes $e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1}$ et $e^{-i\vec{p}_j \cdot \vec{x}_j}$ et intégrer sur les directions de $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_j$. Il vient alors :

$$\frac{2}{\pi} \frac{q_1 q_2 (\epsilon_j - E_{n_j}(\epsilon_j))^{-1}}{|\vec{p}_j|^3} \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 \int_0^a x_1 dx_1 u_{n_1, \epsilon_1}(\vec{x}_1, \epsilon_1) V_1(\vec{x}_1) j_{\epsilon_1}(p_1 x_1) \dots \\ \dots Y_{LM}^*(\hat{q}_1, \hat{p}_1) \int_0^\infty dx_j x_j u_{n_j, \epsilon_j}(\vec{x}_j, \epsilon_j) j_{\epsilon_j}(p_j x_j) Y_{LM}(\hat{q}_2, \hat{p}_j)$$

On définit les quantités physiques f et g :

$$41 \quad f_{ne}(q, p) = p^{-\epsilon} \int_0^a u_{ne}(x, \epsilon) V(x) j_{\epsilon}(px) dx$$

$$42 \quad g_{ne}(q, p) = p^{-\epsilon} \int_0^\infty u_{ne}(x, \epsilon) j_{\epsilon}(px) dx \quad / (\epsilon - E_{ne}(\epsilon))$$

L'expression de K s'écrit alors :

$$K_{n_1, \epsilon_1, q_1, p_1}^{L} = \frac{2}{\pi |\vec{p}_j|^3} \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 \sum_{LM} Y_{LM}^*(\hat{q}_1, \hat{p}_1) p_1^{\epsilon_1} f_{n_1, \epsilon_1}(q_1, p_1) \dots \\ \dots p_j^{\epsilon_j} g_{n_j, \epsilon_j}(q_j, p_j) Y_{LM}(\hat{q}_2, \hat{p}_j)$$

Le produit des quantités f et g dépend seulement du cosinus de l'angle formé par les directions $\vec{q}_1$ et $\vec{q}_2$ par l'intermédiaire des modules de $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_j$. On peut donc en faire l'analyse en polynômes de Legendre :

$$43 \quad \int_{n \in \mathbb{Z}} (q_i, p_i) g_{n_j l_j} (q_j, p_j) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{q}_i) Y_l^{m*}(\hat{q}_j) \right\} \dots \\ \dots \int_{-1}^1 P_l(u) du \int_{n \in \mathbb{Z}} (q_i, p_i(u)) g_{n_j l_j} (q_j, p_j(u))$$

et d'après 40 :

$$44 \quad p_i^2(u) = (\alpha_j^2 q_i^2 - 2\alpha_j q_i q_j u + q_j^2) / \beta_j^2 \\ p_j^2(u) = (q_i^2 - 2\alpha_j q_i q_j u + \alpha_j^2 q_j^2) / \beta_j^2$$

On peut alors réaliser l'intégrale sur les directions de $\hat{q}_i$ et $\hat{q}_j$.
Ceci fait apparaître un coefficient géométrique

$$45 \quad K_{l, l_j, l_j}^L(q_i, q_j) = \sum_m \int d\hat{q}_i \int d\hat{q}_j Y_{l, l_j}^{L, M}(\hat{q}_i, \hat{p}_i) P_l^L(\hat{q}_i) Y_{l, l_j}^m(\hat{q}_i) Y_{l_j, l_j}^{L, M'}(\hat{q}_j, \hat{p}_j) P_{l_j}^{L'}(\hat{q}_j) P_{l_j}^{L'}$$

Ce coefficient est calculé en appendice (A.4). Il contient toutes les règles de sélection comme $\delta_{LL'} \delta_{MM'}$ et il est évidemment indépendant de K . D'autre part, ce coefficient est nul à moins que $2l \leq l_i + l_j + l_j$

Si on introduit alors le nouveau coefficient géométrique :

$$46 \quad K_{l, l_j, l_j}^L(q_i, u, q_j) = \sum_l K_{l, l_j, l_j}^L(q_i, q_j) P_l(u)$$

le noyau qui apparaît dans les équations de Faddeev se met sous la forme :

$$47 \quad K_{n_i l_i, n_j l_j, l_j}^L(q_i, q_j) = \frac{4q_i q_j}{|\beta_j|^3} \int_{-1}^1 du K_{l, l_j, l_j}^L(q_i, u, q_j) \int_{n \in \mathbb{Z}} (q_i, p_i(u)) g_{n_j l_j} (q_j, p_j(u))$$

• Singularités du noyau

Les grandeurs f et g définies par les relations 41 et 42 ne sont pas vraiment indépendantes. Nous allons établir entre elles une

relation qui permettra de mieux voir les singularités du noyau et qui fournira d'autre part un test dans le calcul pratique. Pour cela nous rappelons les équations que satisfont la fonction de Bessel et l'état de Kapur-Peierls :

$$48 \quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + p^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) x j_\ell(px) = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + E_{n\ell}(\varepsilon) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - V(x) \right) u_{n\ell}(x, \varepsilon) = 0 & x \leq a \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - V(x) \right) u_{n\ell}(x, \varepsilon) = 0 & x > a \end{cases}$$

De ces équations on tire d'après la méthode classique du wronskien :

$$49 \quad \begin{cases} W(u_{n\ell}, x j_\ell, a) + (E_{n\ell}(\varepsilon) - p^2) \int_0^a u_{n\ell}(x, \varepsilon) j_\ell(px) x dx - \dots \\ \dots \int_0^a u_{n\ell}(x, \varepsilon) V(x) x j_\ell(px) dx = 0 \\ W(u_{n\ell}, x j_\ell, R) - W(u_{n\ell}, x j_\ell, a) + (\varepsilon - p^2) \int_a^R u_{n\ell} j_\ell x dx = \int_a^R u_{n\ell} V x j_\ell dx \end{cases}$$

Compte tenu du comportement de $u_{n\ell}(R, \varepsilon)$ en $e^{\sqrt{\varepsilon} R}$, pour R grand le wronskien tend vers zéro et si l'on introduit les grandeurs :

$$50 \quad \begin{cases} W_{n\ell}(q, p) = p^{-\ell} W(u_{n\ell}, x j_\ell, a) \\ \bar{J}_{n\ell}(q, p) = p^{-\ell} \int_0^\infty u_{n\ell}(x, \varepsilon) V(x) j_\ell(px) dx \end{cases}$$

on peut écrire à partir de 49 :

$$51 \quad g_{n\ell}(q, p) = \left(\frac{\bar{J}_{n\ell}(q, p) - W_{n\ell}(q, p)}{E_{n\ell}(\varepsilon) - p^2} + \frac{\bar{J}_{n\ell}(q, p) + W_{n\ell}(q, p)}{\varepsilon - p^2} \right) \frac{1}{\varepsilon - E_{n\ell}(\varepsilon)}$$

Les singularités du noyau sont alors apparentes. On reconnaît d'abord les singularités logarithmiques dans le dénominateur $\varepsilon - p^2$ qui, en fonction de q et q' , devient d'après 44 et la définition de ε :

$$\varepsilon - q_1^2 = \frac{\alpha_{11}^2 q_1^2 - 2\alpha_{11} q_1 q_2 \mu + q_2^2}{p_{11}^2} = \varepsilon - \frac{q_1^2 - 2\alpha_{11} q_1 q_2 \mu + q_2^2}{p_{11}^2}$$

On reconnaît aussi la singularité due aux états liés dans le dénominateur $\varepsilon - E_{ne}(\varepsilon)$ qui s'annule d'après 17 si ε devient l'énergie de liaison du système de deux nucléons. Un autre dénominateur apparaît $E_{ne}(\varepsilon) - p^2$ qui peut s'annuler pour $\varepsilon < 0$ puisque, on l'a vu, $E_{ne}(\varepsilon < 0)$ est réel. En fait on peut voir d'après la première équation de 49 que le numérateur est lui aussi nul.

Cas du développement sur les états de Sturm Liouville

Avec le développement 22 ou 24 de la fonction de Green sur les états de Sturm Liouville on obtient le même système d'équations 35 et le noyau est aussi donné par l'expression 47 ; les fonctions f et g sont alors définies par :

$$52 \quad f_{ne}(q, p) = p^{-e} \int_0^{\infty} u_{ne}(x, \varepsilon) V(x) f_e(px) x dx$$

$$53 \quad g_{ne}(q, p) = p^{-e} \int_0^{\infty} u_{ne}(x, \varepsilon) f_e(px) x dx / (1 - \lambda_{ne}(\varepsilon))$$

Le même raisonnement permet d'obtenir une relation entre f et g

$$54 \quad g_{ne}(q, p) = \frac{\lambda_{ne}(\varepsilon) f_{ne}(q, p)}{(1 - \lambda_{ne}(\varepsilon))(\varepsilon - p^2)}$$

expression où les singularités sont apparentes. Si le potentiel ne garde pas un signe constant alors en le partageant en deux termes on obtient une autre expression :

$$55 \quad g_{ne}(q, p) = \frac{\lambda_{ne}(\varepsilon) f_{ne}(q, p) + (1 - \lambda_{ne}(\varepsilon)) p^{-e} \int_0^{\infty} u_{ne}(x, \varepsilon) U(x) f_e(px) x dx}{(1 - \lambda_{ne}(\varepsilon))(\varepsilon - p^2)}$$

Ces relations simplifient considérablement les calculs numériques.

IV.1.6 - Comparaison de la méthode proposée avec celle de Kim ou Osborn (III 21)

Supposons que nous ayons à résoudre le même problème par exemple celui de l'état lié de trois bosons par la méthode directe (Kim ou Osborn) et par la méthode précédente. Dans les deux cas, il nous faut choisir un ensemble de valeurs de l'impulsion q_1 pour discrétiser l'intégrale de 0 à ∞ sur l'impulsion relative d'une particule par rapport au centre de masse des deux autres. Pour chacune de ces impulsions il faut, dans la première méthode, résoudre l'équation de Lippman-Schwinger pour l'énergie $E - q_1^2 = \epsilon_1$ et, dans l'autre méthode, nous devons déterminer les états de Kapur-Feierlis pour cette même valeur d'énergie, soit donc les quantités $\langle k | T(\epsilon_1) | k' \rangle$ et $u_{k\epsilon}(r, \epsilon_1)$ pour un certain nombre de valeurs de k et k' et de n et x .

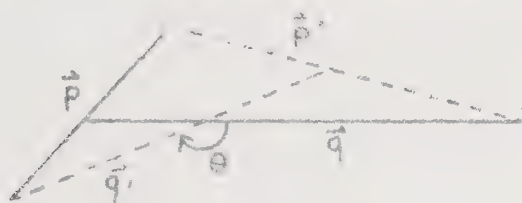


FIGURE 12

Ensuite nous avons à évaluer une intégrale sur p'^2 (Kim) et une intégrale sur $u = \cos \theta$ dans la méthode proposée. Pour réaliser correctement l'intégrale sur p'^2 , Kim choisit des poids de discrétisation tels que l'intégrale soit juste pour N_p fonctions linéairement indépendantes (ce sont des polynômes chez Osborn) pour lesquelles on peut effectuer l'intégrale sur p'^2 ou de manière équivalente sur u avec toute la précision voulue. C'est exactement ce qui est fait dans la deuxième méthode mais avec comme fonctions linéairement indépendantes les états de Kapur-Feierlis. Ceux-ci, comme les états de Sturm-Liouville, représentent le meilleur choix. En effet, ils diagonalisent l'interaction à deux corps, ils constituent une base et donnent à la fonction d'onde le bon comportement asymptotique par construction même. Ce dernier point est loin d'être réalisé avec des fonctions arbitraires et a beaucoup d'importance pour la solution. Ainsi pour le même nombre de fonctions linéairement indépendantes, les deux méthodes exigent des calculs du même ordre de difficulté, mais la dernière est susceptible de nous fournir des résultats beaucoup plus justes.

IV.1.7 - Comparaison des deux développements possibles de la fonction de Green 12 et 24 pour la résolution des équations de Faddeev

Nous avons voulu comparer l'intérêt des deux développements séparables 12 et 24 de la fonction de Green pour l'étude de l'état lié de trois bosons. On utilise les mêmes hypothèses que dans le chapitre III, à savoir que nous recherchons un état lié de moment angulaire total nul où les particules n'interagissent que dans l'état de moment orbital relatif $\ell = 0$. D'après les notations précédentes ceci s'écrit $\ell_1 = 0$ $\ell_2 = 0$ $L = M = 0$. Dans ce cas, comme on peut le voir en appendice (A.5) le facteur géométrique de la relation 46 vaut $(4\pi)^{-3}$. Le coefficient de changement de coordonnées $|\beta_{ij}| = \sqrt{3}/2$ d'autre part les contributions de $G_1 V_1 \Psi_2$ et $G_1 V_1 \Psi_3$ (et $\alpha_{ij} = -1/2$) sont identiques comme on l'a vu au chapitre III et il s'ensuit que le système 35 ainsi que le noyau 47 deviennent :

$$56 \quad F_n(q) = \sum_{n'=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dq' K_{nn'}(q, q') F_{n'}(q)$$

avec :

$$57 \quad K_{nn}(q, q') = \frac{16q'q}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 \int_{n_0}^1 (q, p(u)) g_{n'_0}(q', p'(u)) du$$

et

$$58 \quad \begin{cases} p^2(u) = (q^2 + 4qq'u + 4q'^2)/3 \\ p'^2(u) = (4q^2 + 4qq'u + q'^2)/3 \end{cases}$$

• Résolution du système 56

Nous avons donc résolu numériquement le système 56 où la somme sur n' a été limitée à N pour les deux développements de la fonction de Green. Pour cela par le changement de variable :

$$q = C(1+t)/(1-t)^{\alpha}$$

on remplace l'intégrale sur q' de 0 à ∞ par une intégrale sur t' de -1 à 1 que l'on discrétise par la méthode de Gauss. C et α doivent être

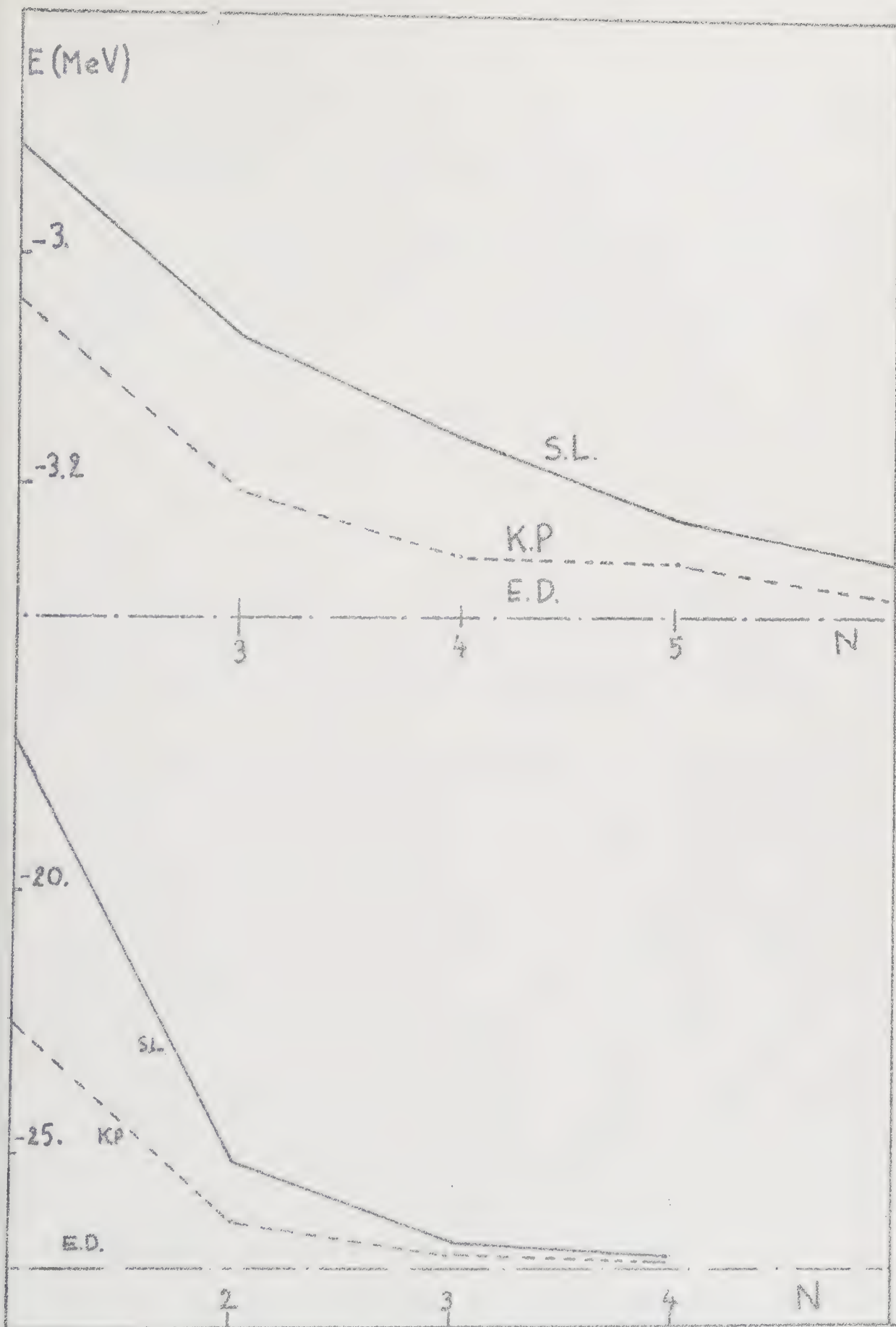


FIGURE 13 : Etats liés de trois bosons interagissants par le potentiel de Yukawa. En haut l'état excité. En abscisse le nombre d'états de projection. S.L. états de Sturm-Liouville K.P. états de Kapur-Peierls E.D. méthode de relaxation ($N = \infty$)

choisis au mieux de façon que l'intégral soit suffisamment monotone en fonction de l' . En particulier α dépend du comportement asymptotique de l'intégral qui doit être établi pour chaque potentiel.

Une fois discretisé, le système 56 devient un système linéaire homogène qui n'admet de solution que pour des valeurs discrètes de l'énergie E qui sont les énergies de liaison. La fonction d'onde est alors obtenue par la solution du système homogène déterminé à un facteur de normalisation près.

Le premier potentiel étudié est celui de Yukawa

$$V(r) = -\lambda e^{-r/a}/r$$

$$\lambda = -1.6 \text{ Fermi}^{-1}$$

$$a = 0.633 \text{ Fermi}^{-1}$$

Les résultats sont indiqués sur la figure 13 où nous avons mis en abscisse le nombre d'états de projection N et en ordonnées l'énergie de liaison. Anticipant sur la suite nous avons porté le résultat obtenu par la méthode de relaxation qui correspond donc au cas où N est infini.

Sur cette figure on peut constater d'une manière générale que l'énergie diminue si on augmente le nombre d'états et ceci provient du potentiel qui garde un signe constant. En effet plus on prendra d'états de projection plus le potentiel, qui est attractif, agira. On constate aussi que la base de Kapur-Peierls, à nombre égal d'états, donne une estimation beaucoup plus juste que celle de Sturm-Liouville. La convergence en N pour la base des états de Kapur-Peierls est d'autant plus rapide que le rayon de raccordement a est petit. Ceci est dû au domaine plus limité de l'espace où on utilise la relation de fermeture, c'est pourquoi la base de Sturm-Liouville qui "ferme" tout l'espace est moins intéressante que celle de Kapur-Peierls et même que celle de l'oscillateur harmonique comme nous avons pu le vérifier (Bo 71). En effet les fonctions d'ondes de l'oscillateur harmonique décroissent très vite et un nombre réduit d'entre elles suffit pour représenter une quelconque fonction dans un petit intervalle autour de l'origine.

Pour les états peu liés on ne peut cependant diminuer excessivement le rayon de raccordement. En effet au-delà d'une certaine valeur,

l'erreur commise en négligeant la partie extérieure croît très vite. L'effet est négligeable pour des états très liés ou pour des potentiels décroissant rapidement.

On sait que "tout" marche avec le potentiel de Ykawa aussi nous avons recommencé la comparaison pour un potentiel moins simple celui de Brink et Boeker B 1 (Br 67) qui a un cœur mou. Nous verrons dans l'étude du triton qu'avec ce potentiel le problème de trois bosons est identique à celui du triton. Il s'écrit :

$$V(r) = S_1 e^{-W_1 r} + S_2 e^{-W_2 r}$$

$$S_1 = 445,4 \text{ MeV} \quad W_1 = 0,7 \text{ F}^{-1}$$

$$S_2 = 233,5 \text{ MeV} \quad W_2 = 0,7 \text{ F}^{-1}$$

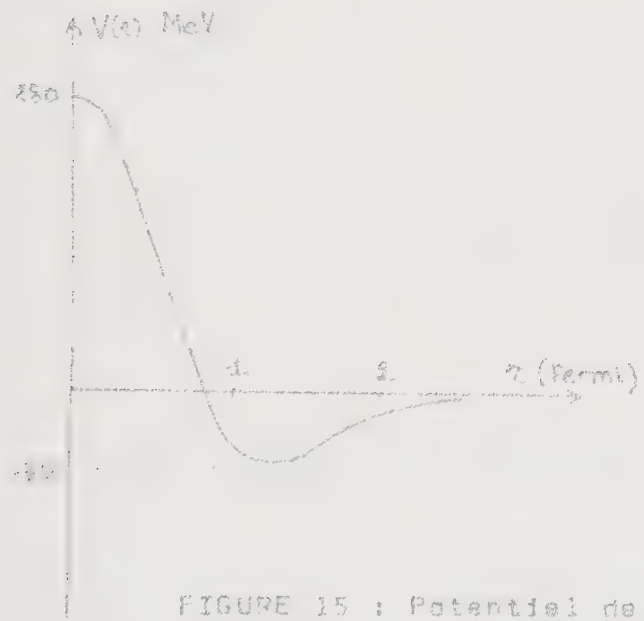


FIGURE 15 : Potentiel de Brink et Boeker

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 16 ci-après.

Il faut attendre 6 ou 7 états pour avoir la convergence. Cette fois-ci l'énergie ne varie pas toujours dans le même sens. La base des états de Sturm Liouville est beaucoup moins bien adaptée à la résolution de ce problème. Dans une méthode comme dans l'autre, pour des potentiels relativement moins singuliers que des potentiels réalistes, une estimation en prenant 2 ou 3 états de projection peut être extrêmement mauvaise.

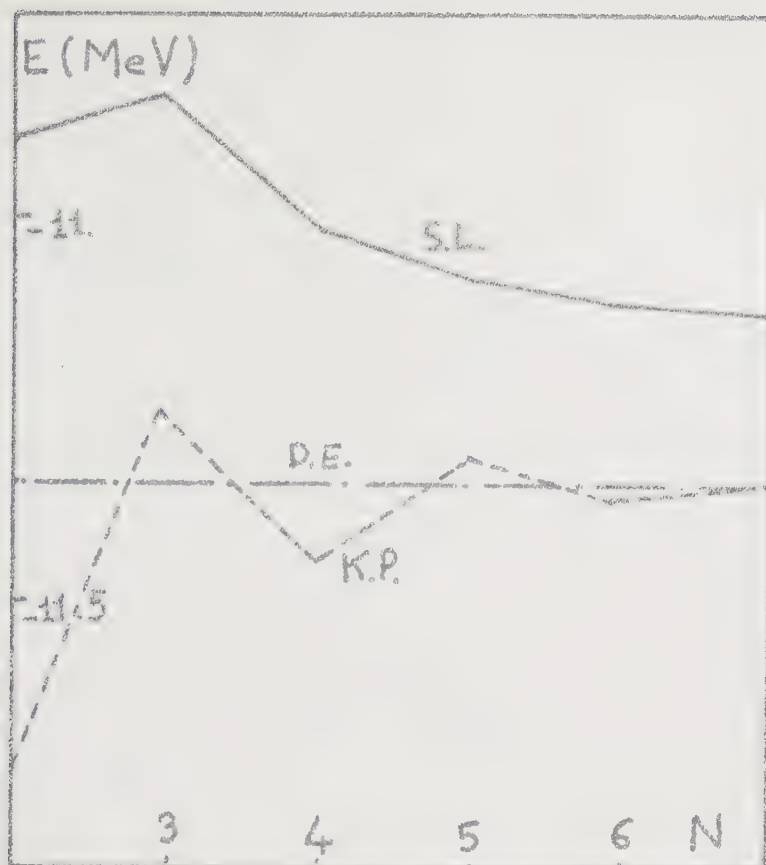


FIGURE 18 : Etat lié de trois bosons interagissants par le potentiel de Brink et Boeker. En abscisse, le nombre d'états de projection.
 S.L. états de Sturm-Liouville
 K.P. états de Kapur-Peierls
 D.E. méthode de relaxation

IV.1.8 - Conclusion sur la solution d'ordre zéro

Nous avons présenté deux méthodes utilisant des développements séparables de la fonction de Green qui sont plus généralisées que les méthodes directes pour les équations de Faddeev. Celle utilisant la base des états de Sturm Liouville est équivalente à celle qui utilise le développement de la matrice de transition proposée par Weinberg. Elle n'avait cependant été utilisée que pour les potentiels de Hulthén, le puits carré et le potentiel en $1/\sinh(r)$ pour lesquels les états de Sturm Liouville peuvent être obtenus littéralement. En utilisant la fonction de Green nous l'avons généralisée à des potentiels quelconques, pouvant avoir une partie attractive et une partie répulsive. La méthode utilisant les états de Kapur Peierls a l'avantage de converger plus vite. Nous l'avons montré ici pour les deux potentiels précédents mais ceci est systématique (Bo 71) sauf pour le puits carré où les deux bases sont confondues. Elle a aussi l'avantage d'être numériquement plus simple car

on limite le problème à la portée α de l'interaction, ce qui nécessite des temps de calculs plus courts et des dimensions plus réduites pour l'ordinateur. Comme nous le verrons dans la suite cette méthode peut s'appliquer à l'étude du triton dans toute sa complexité. Il n'en reste pas moins vrai que ces deux méthodes ne peuvent donner entièrement confiance ; en effet on ne peut indiquer si on est loin ou non du cas $N \rightarrow \infty$ c'est-à-dire de l'asymptote. On peut évidemment faire croître N c'est-à-dire prendre un nombre de plus en plus grand d'états de projections mais alors on obtient des systèmes matriciels trop grands et un temps de calcul prohibitif. Par contre ces méthodes, et spécialement celle utilisant les états de Kapur-Peierls, peuvent nous fournir la solution d'ordre zéro pour la méthode itérative que nous allons présenter maintenant.

IV.2 - FORME INTÉRO DIFFÉRENTIELLE DES ÉQUATIONS DE FADDEEV

Les équations différentielles, à la différence des équations intégrales qui représentent un effet de moyenne, peuvent se résoudre pas à pas sans conduire à des systèmes matriciels. Rien n'empêche alors de prendre un pas de progression aussi fin que l'on veut, compte tenu de la précision exigée. Ceci nous a conduit à déduire des équations de Faddeev un système d'équations intégral-différentielles.

IV.2.1 - Formulation générale

Notre point de départ est toujours une des équations de Faddeev sous la forme I 26 :

$$60 \quad |\Psi_1\rangle = G_0 T_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle) = G_0 V_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle)$$

c'est-à-dire que $|\Psi_1\rangle$ est la solution sortante de :

$$61 \quad (E - H_0 - V_1) |\Psi_1\rangle = V_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle)$$

Nous projetons $|\Psi_1\rangle$ sur les ondes sphériques libres du mouvement relatif 1-(23)

$$62 \quad \Psi_1(\vec{r}_1, \vec{q}_1) = \sum_{\lambda, \mu} \int_0^\infty dq_1 \langle \vec{r}_1 | \lambda, \mu, q_1 \rangle \Psi_{\lambda, \mu}^{\text{F}}(\vec{r}_1, q_1)$$

On peut analyser $\Psi_{\ell_1}^{V_1}(\vec{x}_1, q_1)$ en harmoniques sphériques de la direction $\hat{x}_1$ et introduire le moment angulaire total ; soit :

$$63 \quad \Psi_{\ell_1}(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{\ell_1, \ell_1', L, M} \int d\vec{q}_1 \left(i^{\ell_1} Y_{\ell_1}(\hat{x}_1) (\vec{y}_1 | \ell_1, q_1) \right)_L^M \Psi_{\ell_1, \ell_1'}^{LM}(\vec{x}_1, q_1) / x_1$$

avec :

$$64 \quad (i^{\ell_1} Y_{\ell_1}(\hat{x}_1) (\vec{y}_1 | \ell_1, q_1))_L^M = \sum_{\ell_1, m_1, \ell_1', \mu_1, L, M} \langle \ell_1, m_1, \ell_1', \mu_1 | L, M \rangle i^{\ell_1} Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{x}_1) (\vec{y}_1 | \ell_1', \mu_1, q_1)$$

L'action de $(E - H_0 - V_1)$ sur ces fonctions est telle que :

$$(E - H_0 - V_1) (i^{\ell_1} Y_{\ell_1}(\hat{x}_1) (\vec{y}_1 | \ell_1, q_1))_L^M = \dots \\ \dots (i^{\ell_1} Y_{\ell_1}(\hat{x}_1) (\vec{y}_1 | \ell_1, q_1))_L^M (E - q_1^2 - \frac{1}{x_1} \frac{d^2}{dx_1^2} x_1 - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x_1^2} - V(x_1))$$

En utilisant alors le développement 62, l'équation 61 s'écrit en utilisant l'orthogonalité des harmoniques sphériques et des ondes sphériques :

$$65 \quad \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + E - q_1^2 - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x_1^2} - V(x_1) \right) \Psi_{\ell_1, \ell_1'}^{LM}(\vec{x}_1, q_1) = x_1 \sum_{m_1, \mu_1} \langle \ell_1, m_1, \ell_1', \mu_1 | L, M \rangle \dots \\ \dots \int d\hat{x}_1 \int d\vec{y}_1 (-i)^{\ell_1} (L + q_1 - \vec{y}_1) V_1(x_1) \langle \vec{x}_1 \vec{y}_1 | \Psi_2 + \Psi_3 \rangle Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{x}_1)$$

On peut utiliser pour Ψ_2 et Ψ_3 des développements analogues à celui de Ψ_1 63 et l'équation 65 devient :

$$66 \quad \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + E - q_1^2 - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x_1^2} - V_1(x_1) \right) \Psi_{\ell_1, \ell_1'}^{LM}(\vec{x}_1, q_1) = x_1 \sum_{m_1, \mu_1} \langle \ell_1, m_1, \ell_1', \mu_1 | L, M \rangle \dots \\ \dots \int d\hat{x}_1 (-i)^{\ell_1} Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{x}_1) \int d\vec{y}_1 \langle \ell_1, \mu_1, q_1 | \vec{y}_1 \rangle V(x_1) \dots \\ \dots \sum_{\ell_2, \ell_2', L', M'} \int d\vec{q}_2 (i^{\ell_2} Y_{\ell_2}(\hat{x}_2) (\vec{y}_2 | \ell_2, q_2))_{L'}^{M'} \Psi_{\ell_2, \ell_2'}^{L'M'}(\vec{x}_2, q_2) / x_2$$

+ contribution de $V_1 \Psi_3$.

Les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_2$ et $\vec{y}_2$ sont reliés par la cinématique et on peut choisir d'intégrer sur $\vec{x}_2$ plutôt que sur $\vec{y}_2$. On introduit les potentiels de couplage :

$$67 \quad V_{l_1 l_2 l_3 l_4}^L(x_1, q_1, x_2, q_2) = \frac{V_0(x_1) x_1 x_2}{|\beta_{21}|^3} \sum_{\substack{m_1, \mu_1 \\ m_2, \mu_2}} \langle l_1 m_1 l_2 \mu_1 | L M \rangle \langle l_1 m_1 l_2 \mu_1 | L' M' \rangle \\ \dots \int d\vec{x}_2 \int d\vec{q}_2 \langle l_1 l_2 \gamma_0^{m_1}(\vec{x}_1) | l_1 \mu_1 q_1 | \gamma_0^{m_2}(\vec{x}_2) \rangle \langle l_2 \mu_2 q_2 | \gamma_0^{m_2}(\vec{x}_2) \rangle$$

le système 66 s'écrit alors d'une manière générale avec $\xi_1 = E - q_1^2$:

$$68 \quad \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \xi_1 - \frac{l_1(l_1+1)}{x_1^2} - V_0(x_1) \right) \Psi_{l_1 l_2}^{LM}(x_1, q_1) = \dots \\ \dots \sum_{j=1}^{\infty} \int d\vec{x}_j \int d\vec{q}_j \sum_{l_j l_j'} V_{l_1 l_2 l_j l_j'}^L(x_1, q_1, x_j, q_j) \Psi_{l_j l_j'}^{LM}(x_j, q_j)$$

Nous avons donc un système d'équations intégral-différentielles dans lequel nous avons déjà utilisé la conservation du moment angulaire qui apparaîtra dans le calcul du potentiel de couplage. Ce potentiel non local est réduit dans l'appendice A.6 de la même manière que pour les noyaux 47 et finalement il s'écrit :

$$69 \quad V_{l_1 l_2 l_3 l_4}^L(x_1, q_1, x_2, q_2) = \frac{V_0(x_1) x_1 x_2}{|\beta_{21}|^3} \int_{-1}^1 d\mu \times \frac{V_0(x_2) x_2}{\beta_{21}^3} \gamma_0^{m_1}(\vec{x}_1) K_{l_1 l_2 l_3 l_4}^L(x_1, q_1, x_2, q_2)$$

Le coefficient géométrique K a déjà été introduit dans la section précédente. Son calcul est détaillé dans A.5. Les impulsions p_1 et p_j dépendent de q_1, q_j et u par les relations 44.

Sur les expressions 68 et 69 les singularités caractéristiques du problème à trois corps ne semblent pas apparaître. En fait, elles sont toujours présentes. Le premier type de singularité dite polaire a lieu lorsque q_1^2 est tel que $\xi_1 = E - q_1^2$ soit une des énergies de liaison possibles du système $j-k$. En effet, l'équation différentielle 68 sans 2ème membre a sa solution sortante régulière à l'origine et l'existence d'une solution en système $j-k$ doit être remise en question. Les singularités logarithmiques proviennent de l'intégrale sur x_j dans l'équation 68.

En effet $\Psi_{\ell_j \ell_j}^{L^2}(x_j, q_j)$ se comporte pour x_j grand comme $x_j h_c^+(\sqrt{E_j} x_j)$ puisque son comportement asymptotique doit être celui d'une onde sortante qui doit satisfaire l'équation 66 sans second membre, aussi l'intégrale du produit de ces deux fonctions par $x_j j_{\ell_j}(p_j x_j)$ fait apparaître un dénominateur en $E_j - p_j^2 = E - q_j^2 - p_j^2$ comme on peut le voir avec les équations :

$$\left(\frac{d^2}{dx_j^2} + E_j - \ell_j \frac{\ell_j + 1}{x_j^2} \right) x_j h_c^+(\sqrt{E_j} x_j) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_j^2} + E_j^2 - \ell_j \frac{\ell_j + 1}{x_j^2} \right) x_j j_{\ell_j}(p_j x_j) = 0$$

En appliquant la méthode du wronskien on obtient :

$$\int_R^{\infty} x_j h_c^+(\sqrt{E_j} x_j) x_j j_{\ell_j}(p_j x_j) dx_j = \frac{W}{E_j - p_j^2} = \frac{W}{E - p_j^2 - q_j^2}$$

où W est le wronskien de ces deux fonctions en R . Il est très important d'isoler les termes singuliers de façon à pouvoir les traiter correctement par exemple en déformant le contour. Pour des énergies négatives comme on l'a déjà vu il n'y a pas de singularités logarithmiques.

IV.3.3 - Les trois bosons et caractéristiques de la méthode

Avec les hypothèses que l'on fait pour l'étude de trois bosons, le système 68 se simplifie considérablement. Il s'écrit alors de manière analogue à 57 :

$$70 \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + E - V(x) \right) \Psi(x, q) = \int_0^{\infty} dq' \int_0^{\infty} dx' V(x, q, x', q') \Psi(x', q')$$

où le potentiel de couplage s'obtient à partir de l'expression 69 avec $\ell_1 = \ell_j = \ell_1 = \ell_j = 0$

$$71 \quad V(x, q, x', q') = \frac{16 q q'}{3 \sqrt{3} \pi} \int_{-1}^1 du \frac{\sin(p x) \sin(p' x')}{p p'}$$

et

$$p^2 = (q^2 + 4qq'u + 4q'^2)/3$$

$$72 \quad p'^2 = (4q^2 + 4qq'u + q'^2)/3$$

$$\epsilon = E - q^2$$

Si on abaisse les intégrales sur u , le système 70 devient un système d'équations différentielles couplées par des potentiels non locaux.

On peut alors comparer l'équation 70 à l'équation III 17 habituelle pour trois bosons :

$$\Psi(p, q) = \frac{2}{3(E - p^2 - q^2)} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dq' \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dp'^2 t_c(p^2, E - q^2, p'^2, q'^2) \Psi(p', q')$$

Il semble à première vue que nous ayons compliqué le problème. En effet, dans l'équation 70 nous avons un opérateur différentiel et une intégrale supplémentaire pour calculer le potentiel non local (relation 71). Ceci est partiellement vrai car l'intégrale sur u se fait très facilement comme nous le verrons et d'autre part l'intégrale sur dx' pose moins de problème que l'intégrale sur dk'^2 car, comme on l'a déjà dit, on peut prendre autant de points sur x' que l'on désire. Il reste encore la différentiation ; c'est à ce faible prix que l'on paye l'avantage d'utiliser directement le potentiel et ceci dans l'espace de configuration. Nous n'avons donc pas à résoudre comme problème préalable les équations de Lipman Schwinger pour obtenir les trois variables $T(k, E, k')$. De plus dans cet espace de configuration on peut envisager des potentiels singuliers à cœur dur ou mou et on peut limiter le problème à la portée même du potentiel *. Un autre avantage de ce système est de faire apparaître l'énergie directement et ceci nous permettra d'obtenir un algorithme de recherche de l'énergie de liaison du système. Enfin, le dernier avantage, et non le moindre, est que l'on peut récrire le système 70 sous la forme d'équations différentielles couplées. De tels systèmes sont courants en physique et il existe de

* Dans l'espace d'impulsion le spectre est très étendu et sa détermination est lente pour des potentiels de portée finie.

nombreuses méthodes pour les résoudre avec une grande confiance. La plupart sont des méthodes de relaxation, c'est-à-dire à caractère itératif pour lesquelles les difficultés croissent avec le carré du nombre d'équations couplées plutôt qu'avec la puissance trois comme les systèmes de résolution directe. Elles sont d'autre part beaucoup moins sensibles aux erreurs d'arrondis.

IV.3 - RÉSOLUTION DU SYSTÈME INTEGRO-DIFFÉRENTIEL

Par discrétisation de l'intégrale sur q' de 0 à ∞ , le système 70 devient un système d'équations couplées qui n'admet de solution normalisable que pour des valeurs discrètes de l'énergie. Pour résoudre un tel système nous avons modifié une méthode utilisée par Host (Re 66) dans la recherche des états liés de particule dans un potentiel déformé, où l'on est conduit à résoudre un système couplé identique mais avec des potentiels de couplage locaux.

IV.3.1 - Méthode de relaxation : recherche de l'énergie de liaison

Nous cherchons à résoudre le système :

$$73 \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + E - q_i^2 - V(x) \right) \Psi(x, q_i) = \sum_{j=1}^N W_j \int_0^{\infty} V(x, q_i; x', q_j) \Psi(x', q_j) dx'$$

où l'on a comme inconnues les N fonctions $\Psi(x, q_i)$ et l'énergie E . Supposons que nous ayons obtenu une solution approchée par la méthode utilisant les états de Kapur-Peierls (solution d'ordre zéro). Soit donc E_0 et $\Psi^0(x, q_i)$. Alors nous résolvons les N équations différentielles non couplées mais avec termes inhomogènes :

$$74 \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + E_0 - q_i^2 - V(x) \right) \Psi^1(x, q_i) = \sum_{j=1}^N W_j \int_0^{\infty} V(x, q_i; x', q_j) \Psi^0(x', q_j) dx'$$

$\Psi^1(x, q_i)$ doit décroître exponentiellement à l'infini. Ce tel problème est facile à résoudre à partir d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Multiplions alors l'équation 73 par $\Psi^1(x, q_1)$, l'équation 74 par $\Psi(x, q_1)$, on soustrait les deux équations obtenues et on intègre de 0 à ∞ . Il apparaîtra alors le wronskien à l'origine, nul car les fonctions sont régulières, et celui à l'infini, nul aussi car les fonctions décroissent exponentiellement. Finalement il restera :

$$\begin{aligned}
 (E-E_0) \int_0^\infty \Psi(x, q_1) \Psi^1(x, q_1) dx &= \sum_{j=1}^N W_j \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \dots \\
 75 \quad \dots \Psi^1(x, q_i) V(x, q_i, x', q_j) \Psi(x', q_j) &- \sum_{j=1}^N W_j \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \dots \\
 \dots \Psi(x, q_1) V(x, q_1, x', q_j) \Psi^1(x', q_j) &
 \end{aligned}$$

Près de la convergence les fonctions $\Psi^1(x, q_1)$ et $\Psi(x, q_1)$ sont voisines et on espère que la vraie solution est peu différente de :

$$\tilde{\Psi}(x, q_i) = a_i \Psi^1(x, q_i)$$

le système 75 devient un système matriciel inhomogène de la forme

$$76 \quad (E-E_0) a_i = a_i A_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sum_j W_j \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \Psi^1(x, q_j) V(x, q_i, x', q_j) \Psi^1(x', q_j) / \int_0^\infty \Psi^1(x, q_i)^2 dx \\
 B_{ij} &= W_j \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \Psi^1(x, q_j) V(x, q_i, x', q_j) \Psi^1(x', q_j) / \int_0^\infty \Psi^1(x, q_i)^2 dx
 \end{aligned}$$

On résoud alors le système aux valeurs propres 76 et on considère la valeur propre E_1 la plus voisine de E_0 ainsi que le vecteur propre correspondant. On a donc une solution améliorée formée par les fonctions

$\tilde{\Psi}^1(x, q_i) = a_i \Psi^1(x, q_i)$ et par $E_1 = E_0$ on recommence le raisonnement avec cette nouvelle solution de départ. Cet algorithme converge très rapidement, que ce soit pour l'énergie ou pour les fonctions $\Psi(x, q_i)$.

IV.3.2 - Résultats et détails numériques

Nous avons considéré les deux potentiels de Yukawa et de Brink et Boeker utilisés dans la section précédente. Le meilleur test de notre méthode est de partir de deux solutions d'ordre zéro différentes obtenues par exemple avec un nombre d'états de Kapur-Peierls différents. Sur le tableau suivant on voit comment évolue l'énergie à chaque itération de la méthode de relaxation en partant de deux solutions d'ordre zéro distinctes. Le potentiel est celui de Yukawa et les deux solutions ont été obtenues avec un rayon du noyau de 5 Fermi et respectivement avec 4 et 5 états de Kapur-Peierls.

E				
itérations				
0	1	2	3	4
- 26.66	- 27.761	- 27.117	- 27.168	- 27.176
- 26.77	- 27.564	- 27.134	- 27.171	- 27.177

D'une manière générale on observe une variation importante de l'énergie à la première itération et une variation en sens inverse à la deuxième pour aboutir à une énergie assez voisine de celle de départ. En fait c'est surtout la fonction d'onde qui change comme on peut le voir sur les variations des normes de chaque $\Psi(x, q_i)$. Ceci est important : les méthodes précédentes donnent donc une énergie correcte mais vraisemblablement des fonctions d'ondes assez mauvaises, ce qui est très grave pour le calcul des observables.

Comme dans toutes les méthodes la discrétisation de l'intégrale sur q est délicate, mais dans la méthode proposée c'est la seule difficulté. Tout le reste du calcul peut être mené avec la précision que l'on veut. De nombreux auteurs pensent avec la discrétisation idéale par le fait que la résultat ne change pas en prenant 10 au lieu de 8 points pour celle-ci. En fait il n'y a pas vraiment de stabilité comme on peut le voir sur les résultats ci-après pour l'état fondamental de trois bosons avec le potentiel de Yukawa. Ceci est en fait véritablement

Nq	E (MeV)
8	- 26.75
12	- 25.75
16	- 25.25
20	- 25.00

à la décroissance peu rapide des contributions des grandes impulsions.

Finalement les résultats définitifs ont été reportés sur les figures précédentes pour les deux potentiels considérés.

IV.3.3 - Comparaison avec la méthode de Malfliet et Tjon

Nous avons déjà parlé de cette méthode au chapitre III. Comme la méthode précédente elle procède par itérations successives. La méthode proposée a cependant plusieurs avantages. En effet, pour Malfliet et Tjon le problème de la discrétisation se pose doublement car l'intégrale est double et nous avons vu précédemment les difficultés que cela occasionne.

D'autre part notre méthode a sur la leur l'avantage d'améliorer l'énergie à chaque itération. En effet pour une énergie d'essai ils itèrent un grand nombre de fois les équations de Faddeev jusqu'à ce que les solutions itérées d'ordre n et $n+1$ soient proportionnelles. Ils choisissent alors une nouvelle énergie jusqu'à ce que ce facteur de proportionnalité soit l'unité. La méthode proposée est donc beaucoup plus rapide.

CHAPITRE V

ETUDE DU TRITON

L'étude des états liés de trois bosons nous a permis de mettre au point la méthode précédente pour l'étude du triton. Compte tenu de la confiance que l'on peut avoir dans les résultats qu'elle fournit nous allons généraliser cette méthode pour pouvoir l'employer dans le problème physique à trois corps le plus simple, c'est-à-dire le triton. Jusqu'à ce jour il n'existe qu'un calcul du triton par les équations de Faddeev et il est dû à Mal'fist et Tjon (Ka 70) et nous avons donné les caractéristiques de leur méthode précédemment. Elle n'a été employée que pour une classe de potentiels particuliers (ceux dont la représentation en espace d'impulsion est littérale) et il y a un désaccord entre leur facteur de forme électrique et celui, voisin de l'expérience, que l'on obtient avec le même potentiel par une méthode variationnelle. Les "critiques" (ce fut la première méthode qui permit d'étudier le triton au moyen des équations de Faddeev) que l'on peut faire à cette méthode, et l'importance de ce problème du triton pour la connaissance de l'interaction nucléon-nucléon, justifient l'essai de notre méthode ne serait-ce que pour confirmer le résultat d'un seul travail. Après avoir rappelé les symétries de la fonction d'onde du triton, nous allons généraliser la méthode de projection sur les états de la configuration afin d'obtenir la solution d'énergie zéro. Nous écrirons ensuite les équations de Faddeev sous forme intégral-différentielle et enfin nous donnerons les résultats pour les potentiels étudiés.

VI.1 - SYMETRIES DE LA FONCTION D'ONDE DU TRITON

Considérant les interactions comme indépendantes de charge nous allons utiliser le formalisme de l'isospin dans lequel la fonction d'onde doit être antisymétrique dans l'échange des particules. Nous ne parlerons donc pas de proton ni de neutron, mais des particules 1 2 3

qui peuvent être dans les états proton et neutron. Nous savons aussi que le triton a un isospin $1/2$ de projection $+1/2$ et dans le formalisme de l'isospin, l'antisymétrie de la fonction d'onde (fonction d'isospin comprise) est très avantageuse pour réduire les équations de Faddeev que nous rappelons (I 26) :

$$\begin{array}{l} 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Psi_1\rangle = G_1 V_1 (|\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_2\rangle = G_2 V_2 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_3\rangle) \\ |\Psi_3\rangle = G_3 V_3 (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) \end{array} \right. \\ 2 \quad |\Psi\rangle = G_0 V_i |\Psi\rangle \end{array}$$

Si dans l'expression 2 on permute les particule j et k , G_0 et V_i sont invariants par contre Ψ change de signe donc Ψ_i est antisymétrique dans l'échange de j et k , ou encore :

$$3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(1,2,3) = -\Psi_1(1,3,2) \\ \Psi_2(1,2,3) = -\Psi_2(3,2,1) \\ \Psi_3(1,2,3) = -\Psi_3(2,1,3) \end{array} \right.$$

Toujours en utilisant la relation 2 on a :

$$\Psi_2(1,2,3) = G_0 V_{13} \Psi(1,2,3)$$

On peut changer les étiquettes des particules : on appelle 3 la particule 1, 1 la particule 2 et 2 la particule 3 ; alors l'expression précédente devient :

$$\Psi_2(3,1,2) = G_0 V_{32} \Psi(3,1,2)$$

L'antisymétrie de Ψ donne :

$$\Psi_2(3,1,2) = G_0 V_{32} \Psi(1,2,3) = \Psi_1(1,2,3)$$

ou aussi bien :

$$4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_2(1,2,3) = \Psi_1(2,1,3) \\ \Psi_3(1,2,3) = \Psi_3(3,1,2) \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que le problème se ramène à la détermination de la seule fonction Ψ_1 qui, en plus, doit d'après 3 être antisymétrique dans l'échange des deux derniers arguments. Finalement on peut garder la première équation du système 1 qui devient d'après 4 :

$$5 \quad \Psi_1(1,2,3) = G_1 V_1 (\Psi_2(2,3,1) + \Psi_1(3,1,2))$$

ou encore, d'après 3 :

$$6 \quad \Psi_1(1,2,3) = G_1 V_1 (\Psi_1(2,3,1) - \Psi_1(3,2,1))$$

Où l'antisymétrie de Ψ_1 dans l'échange de 2 et 3 apparaît nettement. Finalement, en additionnant 5 et 6, les équations de Faddeev se ramènent aux équations :

$$7 \quad \Psi_1(1,2,3) = 2 G_1 V_1 \Psi_1(2,3,1)$$

avec :

$$8 \quad \Psi_1(1,2,3) = -\Psi_1(1,3,2)$$

Projections sur les différents états d'isospin

Il existe deux fonctions d'isospin $1/2$ fermé avec 3 particules qui sont indépendantes. Nous allons considérer les deux suivantes $\Phi_0(1,2,3)$ et $\Phi_1(1,2,3)$, respectivement symétriques et antisymétriques dans l'échange des nucléons 2 et 3 et qui résultent du couplage de l'isospin de la particule 1 à l'isospin $t_{23} = 1$ ou 0 des nucléons 2 et 3.

$$9 \quad \Phi_1(1,2,3) = |t_{12}=1/2, t_{23}=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (1,2,3 | npn + nnp - 2 pnn)$$

$$10 \quad \Phi_0(1,2,3) = |t_{12}=1/2, t_{23}=0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,2,3 | npn - nnp)$$

Sur ces expressions les propriétés de symétrie sont évidentes, ainsi que l'orthogonalité. On peut alors projeter la fonction Ψ_1 d'espace spin-isospin sur des fonctions d'isospin Φ_0 et Φ_1 et on écrit :

$$11 \quad \Psi_1(1,2,3) = \Psi_0(1,2,3) \Phi_1(1,2,3) + \Psi_1(1,2,3) \Phi_0(1,2,3)$$

où les fonctions Ψ_0 et Ψ_1 sont des fonctions d'espace spin respectivement antisymétriques et symétriques dans l'échange des deux derniers arguments d'après 8. Alors l'équation 7 devient un système de deux équations couplées liant Ψ_0 et Ψ_1 . En effet en utilisant la relation

11 et l'orthogonalité des fonctions d'isospins on a :

$$12 \quad \begin{cases} \Psi_a(1,2,3) = 2[G, V_1]_{t=1} \left\{ \Psi_a(1,3,4) \langle \Phi_s | \Phi_s(2,3,4) \rangle + \Psi_s(2,3,4) \langle \Phi_s(1,2,3) | \Phi_a(1,3,3) \rangle \right\} \\ \Psi_s(1,2,3) = 2[G, V_1]_{t=0} \left\{ \Psi_a(1,3,4) \langle \Phi_a | \Phi_s(2,3,4) \rangle + \Psi_s(2,3,4) \langle \Phi_a(1,2,3) | \Phi_a(1,3,3) \rangle \right\} \end{cases}$$

Les produits scalaires de fonction d'isospin peuvent être effectués avec l'aide des coefficients géométriques de recouplage $\{6j\}$ mais il est plus simple d'utiliser les expressions détaillées 9 et 10 de Φ_s et Φ_a , on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \Phi_s(2,3,4) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (1,2,3 | nnp + pnn - 2 npn) \\ \Phi_a(2,3,4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1,2,3 | nnp - pnn) \end{aligned}$$

On peut alors effectuer les produits scalaires des fonctions d'isospin et le système 12 devient :

$$\begin{aligned} \Psi_a(1,2,3) &= [G, V_1]_{t=1} (-\Psi_a(2,3,4) + \sqrt{3} \Psi_s(2,3,4)) \\ \Psi_s(1,2,3) &= [G, V_1]_{t=0} (-\sqrt{3} \Psi_a(2,3,4) - \Psi_s(2,3,4)) \end{aligned}$$

C'est-à-dire deux équations couplées que l'on peut écrire sous une forme plus condensée :

$$13 \quad \Psi_t(1,2,3) = [G, V_1]_t \sum_{t'=0}^1 \varepsilon_{tt'} \Psi_{t'}(2,3,4)$$

avec $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{00} = -1$, $\varepsilon_{10} = -\varepsilon_{01} = \sqrt{3}$ et $t = 1$ pour antisymétrique, $t = 0$ pour symétrique. Ce système d'équations résume dans toutes les propriétés de symétrie du lépton et toute la suite sera concernée à sa résolution.

7.2 - RECHERCHE DE LA SOLUTION D'ORDRE ZERO

La possibilité d'utiliser des potentiels avec spin orbite et force tensorielle nous conduira d'abord à généraliser les états de Kapur Peierls. Nous parlerons aussi de leur détermination pratique. Dans une deuxième partie nous les utiliserons dans l'équation 13 que nous ramènerons à un système d'équations intégrales d'une variable.

V.2.1 - Les états de Kaper Peierls. Généralisation

Ils sont toujours définis comme les solutions continues à dérivée premières continues et à comportement d'ondes sortantes de :

$$14 \quad (E_\alpha - H) \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = 0 \quad \text{dans la sphère de rayon } a$$

$$15 \quad (E - H) \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = 0 \quad \text{en dehors de la sphère}$$

Dans le cas général l'hamiltonien commute avec J^2 , J_z , S^2 et la parité, on peut donc classer les états par les nombres quantiques j , m , s et t où t isospin est relié à la parité par $\frac{1-E}{2} + s + t$ impair. Il nous faut encore un nombre quantique principal n qui est relié au nombre de noeuds si $p = (-1)^j$, soit donc :

$$16 \quad \Psi_\alpha(\vec{r}, E) = \sum_c u_{n\ell sj}^t(r) y_{\ell sj}^m(\hat{r}) i^{l/2}$$

La somme sur ℓ est limitée par la parité ou l'isospin et le couplage des moments angulaires qui apparaît dans la fonction d'angle et de spin $y_{\ell sj}^m$. Les équations 14 et 15 deviennent alors :

$$17 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E_{n\ell sj}^t - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_{n\ell sj}^t(r) = \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'}^{sj}(r) u_{n\ell' sj}^t(r)$$

$$18 \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_{n\ell sj}^t(r) = \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'}^{sj}(r) u_{n\ell' sj}^t(r)$$

$$18b \quad \text{avec} \quad V_{\ell\ell'}^{sj}(r) = \langle y_{\ell sj}^m | V | y_{\ell' sj}^m \rangle i^{l-l'}$$

Considérons alors les équations analogues pour un autre état ayant n différent, c'est-à-dire tel que $E_{n' \ell' sj}^t \neq E_{n \ell sj}^t$. Nous utilisons encore une fois le raisonnement du wronskien pour obtenir :

$$\sum_c \left\{ W(u_{n\ell sj}^t, u_{n' \ell' sj}^t, a) + \int_0^a u_{n\ell sj}^t(r) u_{n' \ell' sj}^t(r) dr \times (E_{n\ell sj}^t - E_{n' \ell' sj}^t) \right\} = 0$$

et

$$\sum_c \left\{ W(u_{n\ell sj}^t, u_{n' \ell' sj}^t, R) - W(u_{n\ell sj}^t, u_{n' \ell' sj}^t, a) \right\} = 0$$

Lorsque E tend vers l'infini par définition les états de Kapur-Peierls se comportent de la même manière :

$$u_{nlj}^t(r) \sim e^{i\sqrt{E}r}/r \quad \text{et le wronskien tend vers zéro}$$

Il s'ensuit la relation :

$$19 \quad \sum_e \int_0^a dr u_{nlj}^t(r) u_{n'l'j'}^t(r) = 0$$

C'est-à-dire, introduisant l'état de Kapur Peierls $\tilde{\Psi}$ renversé dans le temps :

$$20 \quad (\tilde{\Psi}_\alpha | \Psi_{\alpha'}) = \delta_{\alpha\alpha'} (\tilde{\Psi}_\alpha | \Psi_\alpha)$$

avec :

$$\tilde{\Psi}_\alpha(r, E) = \sum_e u_{nlj}^{t*}(r) e^{iY_{nlj}^m(r)}/r$$

On peut démontrer de la même manière que les énergies propres sont réelles, soit complexes avec partie imaginaire négative si E est positif.

La détermination pratique des états de Kapur-Peierls a déjà été étudiée au Chapitre IV si le spin est nul. Dans le cas contraire si la parité de l'état est $(-)^j$ alors la somme sur l dans la relation 16 est limitée à un terme et on est dans la même situation que pour le spin nul *. Si l'état a une parité non naturelle alors on doit résoudre un système de deux équations couplées. Ainsi pour les états $t = 0 \quad j = 1 \quad s = 1$ on a le système :

$$21 \quad \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + E_n - V_{00}^{11}(r) \right) u_{n0}(r) &= V_{02}^{11}(r) u_{n1}(r) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + E_n - V_{22}^{11}(r) - \frac{6}{r^2} \right) u_{n1}(r) &= V_{20}^{11}(r) u_{n0}(r) \end{aligned}$$

dans la région intérieure et les mêmes équations avec $E_n = E$ à l'extérieur, on détermine la solution par approximations successives : On calcule au préalable deux jeux de solutions linéairement indépendantes

* pas d'équations couplées.

qui se comportent asymptotiquement comme des ondes sortantes et ceci dans la région extérieure, soit donc :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

On détermine alors deux solutions indépendantes, régulières à l'origine solution de 21 pour une énergie d'essai E_n^0 soit donc :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

On choisit alors α, β et λ tels que $\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

se raccordent au point a et que h_0 et W_0 (ou h_2 et W_2) aient même dérivée en ce point. Ces trois conditions déterminent de manière univoque les constantes α, β, λ . Si on refait le raisonnement du wronskien avec la solution approchée (W_0, W_2) et la solution recherche du système 21 on obtient :

$$(E_n - E_n^0) \int_0^a (u_{n0} w_0 + u_{n1} w_1) dr = W(u_{n0}, w_0, a) - W(u_{n1}, w_1, a) = 0$$

$$W(u_{n0}, h_0, a) + W(u_{n1}, h_1, a) - W(u_{n0}, h_0, a) - W(u_{n1}, h_1, a) = 0$$

Nous l'avons déjà utilisé : le wronskien nul à l'infini est nul en a et les deux équations donnent :

$$22 \quad (E_n - E_n^0) = (W(u_{n1}, h_1, a) - W(u_{n1}, w_1, a)) / \int_0^a (u_{n0} w_0 + u_{n1} w_1) dr$$

Nous avons utilisé la continuité de la fonction W_0 avec h_0 ainsi que de leur dérivée en a . En remplaçant dans 22 u_{n0} et u_{n2} par la solution approchée W_0 et W_2 , on obtient un algorithme de recherche pour l'énergie (donc pour la solution) qui converge très rapidement.

A titre d'exemple nous avons indiqué sur la figure 17 les trajectoires des énergies des états de Kapur Peierls pour le potentiel de Hamada Johnston (Ha 62). L'état $\Gamma = 1, n = 3$ est en fait le premier

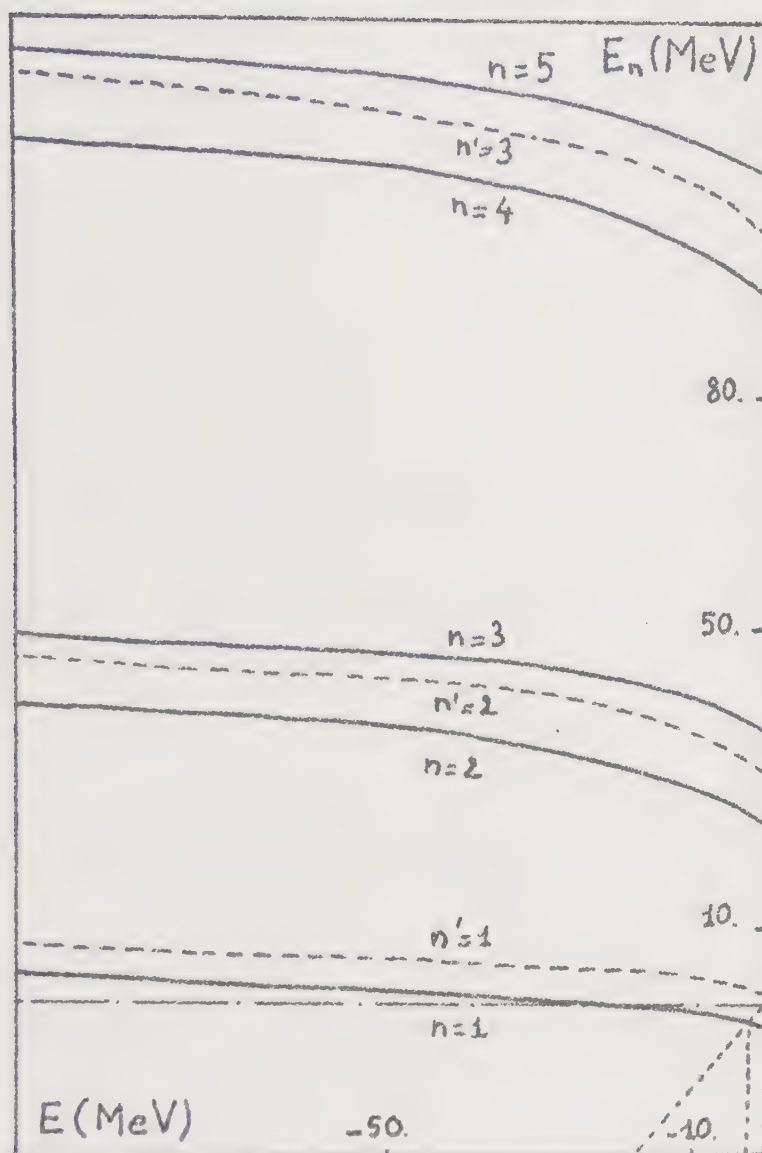


FIGURE 17 : Trajectoires des énergies des états de Kapur-Peierls, pour le potentiel de Hamada-Johnston. Rayon de coupure 5 fermis. En traits pleins, on a porté les états d'isospin $t=0$, en pointillé, les états d'isospin $t=1$. La construction géométrique donne l'énergie de liaison du deuteron.

état de Kapur-Peierls qui a comme moment orbital prédominant $\ell = 2$, le deuxième est celui numéroté par $n = 5$. Le groupement remarquable d'états se retrouve de manière identique pour le potentiel de Reid (Re 68). La distance entre les trajectoires augmente beaucoup si on diminue le rayon de coupure comme on peut le voir sur le tableau suivant pour $E = -4$.

a Fermi	$t = 1$ $E_n = 2$	$t = 1$ $E_n = 3$	$t = 1$ $E_n = 4$	$t = 1$ $E_n = 5$	$t = 1$ $E_n = 6$	$t = 1$ $E_n = 7$
4	92.24	115.0	308.5	351.0	619.0	726.4
5	45.92	61.43	162.9	200.0	325.8	380.0
6	26.64	38.26	97.07	112.1	207.0	224.3

V.2.2 - Projection des équations de Faddeev sur les états de Kapur Peierls

Le point de départ est l'équation 13 que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$23 \quad (E - H_0 - V_1) \Psi_{t(1,2,3)} = \sum_{t'=2,3,4} E_{t'} V_1^{t'} \Psi_{t'(2,3,1)}$$

On peut encore introduire les ondes sphériques libres de la particule 1 où cette fois-ci le moment angulaire Λ_1 résulte du couplage du moment orbital ℓ_1 au spin $1/2$, c'est-à-dire :

$$24 \quad \langle \vec{y}_1 | \lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \ell_1 q_1 \rangle_{\Lambda_1} (q_{m_1}) \mathcal{Y}_{\lambda_1 \Lambda_1}^{\mu_1}(\vec{y}_1)$$

ces ondes sphériques généralisées sont normées et forment une base :

$$25 \quad \sum_{\lambda_1 \Lambda_1 \mu_1} \int_0^\infty dq_1 |\lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1\rangle \langle \lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1| = 1$$

On peut aussi les écrire sous une forme utile dans la suite :

$$25b \quad \langle \vec{y}_1 | \lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1 \rangle = (2\pi)^{-3/2} q_1 \int d\hat{q}_1 e^{-i\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1} \mathcal{Y}_{\lambda_1 \Lambda_1}^{\mu_1}(\hat{q}_1)$$

Ces ondes sphériques sont vecteurs propres de l'opérateur énergie cinétique du mouvement relatif : - (2,3) avec la valeur propre q_1^2 .

Considérons maintenant les états de Kapur Peierls, $\Psi_{n_1, n_2, j_1, m_1}^t(\vec{x}_1)$ du mouvement relatif 2/3 pour l'énergie $E - q_1^2 = \varepsilon_1$. Ils sont par définition vecteur propre de l'hamiltonien relatif $-\Delta x_1 + V_1^t$ avec l'énergie E_{n_1, n_2, j_1}^t . Finalement les états

$$(\vec{y}_1 | \lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1) \Psi_{n_1, n_2, j_1, m_1}^t(\vec{x}_1)$$

sont vecteurs propres de $E - H_0 - V_1^t$ avec la valeur propre $E - q_1^2 - E_{n_1, n_2, j_1}^t(\varepsilon_1)$ ou $\varepsilon_1 - E_{n_1, n_2, j_1}^t(\varepsilon_1)$ dans la région intérieure et 0 dans la région extérieure. Il en est de même pour la combinaison linéaire :

$$26 \quad \Psi_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1 j_1 m_1}^t(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{\mu_1, m_1} \langle \lambda_1 \mu_1 j_1, m_1 | j_1 m \rangle (\vec{y}_1 | \lambda_1 \Lambda_1 \mu_1 q_1) \Psi_{n_1, n_2, j_1, m_1}^t(\vec{x}_1)$$

Si on considère alors $(\Psi_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1 j_1 m}^t | \Psi_{n_1', n_2', j_1', \lambda_1' \Lambda_1' j_1' m'}^t)$

où l'intégrale sur $\vec{x}_1$ a lieu seulement dans la sphère de rayon a et où $\tilde{\Psi}$ signifie la même fonction que Ψ mais où l'on a pris l'état de Kapur-Peierls renversé dans le temps. Alors d'après les propriétés d'orthogonalité des Clebsch-Gordan, des ondes sphériques et des états de Kapur-Peierls * on a :

$$26 \quad (\tilde{\Psi}_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1 j_1 m}^t | \Psi_{n_1', n_2', j_1', \lambda_1' \Lambda_1' j_1' m'}^t) = \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\Lambda_1' \Lambda_1} \delta_{j_1' j_1} \delta_{m' m} \delta_{n_1' n_1} \delta_{n_2' n_2} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\Lambda_1' \Lambda_1} \delta_{j_1' j_1} \delta_{m' m}$$

Compte tenu du comportement en onde sortante de la solution $\Psi^{t(1,2,3)}$ ces états forment une base dans la mesure où le membre de droite de 23 est nul pour $x_1 > a$. On a :

$$27 \quad \Psi^{t(1,2,3)} = \int dq_1 \sum_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1 j_1 m} \Psi_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1 j_1 m}^t(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \frac{\Psi_{n_1, n_2, j_1, \lambda_1 \Lambda_1}^{tjm}(q_1)}{\varepsilon_1 - E_{n_1, n_2, j_1}^t(\varepsilon_1)}$$

* Les états de Kapur Peierls ont été choisis normalisés.

En utilisant le développement 27 dans les équations de Faddeev 23 et en utilisant la relation d'orthogonalité 26 on obtient :

$$28 \quad \Psi_{n_1 n_2 j_1 l_1 \Lambda_1}^{t j m}(q_1) = \sum_{t'=0,2} (\tilde{\Psi}_{n_1 n_2 j_1 l_1 j m}^t V_1^t \Psi_{(2,3,1)}^{t'}) \varepsilon_{t t'}$$

Si on utilise pour $\Psi^{t'}(2,3,1)$ le même développement 27 que pour Ψ^t on obtient un système d'équations intégrales simples couplées :

$$29 \quad \Psi_{n_1 n_2 j_1 l_1 \Lambda_1}^{t j m}(q_1) = \sum_{t', n_2, j_2, l_2, \Lambda_2} \varepsilon_{t t'} \int_0^\infty dq_2 K_{n_1 n_2 j_1 l_1 \Lambda_1}^{t t' j}(q_1, q_2) \Psi_{n_1 n_2 j_2 l_2 \Lambda_2}^{t' j m}(q_2)$$

où nous avons déjà introduit la conservation du moment angulaire que l'on peut vérifier dans le calcul du noyau

$$30 \quad K_{n_1 n_2 j_1 l_1 \Lambda_1}^{t j}(q_1, q_2) = \frac{(\tilde{\Psi}_{n_1 n_2 j_1 l_1 j m}^t(\vec{x}_1, \vec{y}_1) V_1^t(\vec{x}_1) \Psi_{n_1 n_2 j_2 l_2 \Lambda_2}^{t'}(\vec{x}_2, \vec{y}_2))}{\varepsilon_L - E_{n_1 n_2 j_2}^{t'}(\varepsilon_2)}$$

Toute la physique et la difficulté du problème sont contenues dans l'élément de matrice ou noyau K de la relation 30. Celui-ci peut se réduire de la même manière que pour le problème de trois particules sans spin. Ce calcul fastidieux et sans difficulté remarquable est reporté en appendice A.7. Finalement on obtient l'expression suivante :

$$31 \quad K = \frac{4 q_1 q_2}{|p_{21}|^3} \sum_{l_1, j_1, l_2, j_2} \int_{-1}^1 du K_{l_1, j_1, l_2, j_2}^j(q_1, u, q_2) f_{n_1 n_2 j_1}^t(q_1, p_1) g_{n_1 n_2 j_2}^{t'}(q_1, p_2)$$

On reconnaît comme au chapitre précédent un coefficient géométrique qui contient toutes les règles de sélection (appendice A.7) dont les moins évidentes sont :

$$32 \quad \begin{cases} l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \text{ pair} \\ \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3 + \vec{l}_4 = \vec{L} \\ \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_3 + \vec{j}_4 = \vec{S} \\ \vec{L} + \vec{S} = \vec{j} \end{cases}$$

D'autre part ce coefficient est un polynôme homogène de degré $\ell_1 + \ell_2$ en q_1 et q_2 . Les deux autres quantités dépendent elles de l'interaction et généralisent les relations IV 41 et IV 42 .

$$33 \quad \begin{cases} f_{n\ell_1\ell_2}^t(q,p) = \sum_{e'} \int_0^a dx x j_e(px) V_{ee'}^{tj}(x) u_{n\ell_1\ell_2}^t(x) p^{-e} \\ g_{n\ell_1\ell_2}^t(q,p) = \int_0^\infty x p^{-e} j_e(px) u_{n\ell_1\ell_2}^t(x) / (\varepsilon - E_{n\ell_1\ell_2}^t(\varepsilon)) \end{cases}$$

La quantité g contient dans son dénominateur les singularités polaires habituelles au problème à trois corps et l'intégrale de 0 à ∞ introduit la singularité logarithmique. Ceci est montré en appendice A.8 où il est établi une relation entre f et g qui permet de les calculer simultanément.

V.2.3 - Hypothèses sur la fonction d'ondes du triton

Le système d'équations 29 est un système d'équations intégrales couplées en nombre infini. Indépendamment de la somme sur n_2 qui doit aller jusqu'à l'infini on a une somme sur les différents moments angulaires qui interviennent. On doit forcément limiter cette somme infinie en ne gardant que les termes que l'on pense prépondérants. Dans l'étude de trois bosons où un problème analogue intervient il a été montré que les ondes telles que $\lambda \gg 2$ contribuaient pour 2 % à l'énergie de liaison et qu'on pouvait raisonnablement considérer seulement les ondes $\lambda = 0$. Nous allons faire pour commencer cette même hypothèse pour le triton. Dans ce cas ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) on a $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{2}$ par conséquent la relation $j_1 + \Lambda_1 = j = \frac{1}{2}$ (spin du triton) entraîne que j_1 ou j_2 ont pour valeurs possibles 0 et 1. Il s'ensuit d'après la parité que ℓ_1 et ℓ_2 ne peuvent avoir comme valeurs que 0 et 2 et que $\ell_1 = \ell_2$. Finalement cette hypothèse consiste à ne considérer que les ondes que nous noterons de manière abrégée $t=1$ et $t=0$ et qui correspondent à :

$$34 \quad \begin{array}{ll} t=1 & \left\{ \begin{array}{l} \lambda=0 \\ j=0 \\ \ell=0 \\ j=0 \end{array} \right. & t=0 & \left\{ \begin{array}{l} \lambda=0 \\ j=1 \\ \ell=0 \text{ et } 2 \\ j=1 \end{array} \right. \end{array}$$

On note alors :

$$35 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_n^t(q) \text{ pour } \Psi_{nsg\Lambda}^{t\frac{1}{2}m}(q) \\ K_{nn'}^{tt'}(q, q') \text{ pour } K_{nsg\Lambda \ n's'g'\Lambda'}^{tt' \frac{1}{2}}(q, q') \quad \xi_{tt'} \\ \int_{ne}^t(q, p) \text{ et } g_{ne}^t(q, p) \text{ pour } \int_{nsg}^t(q, p) \text{ et } g_{nsg}^t(q, p) \end{array} \right.$$

alors le système 29 devient :

$$36 \quad \Psi_n^t(q) = \sum_{t'=0,1} \sum_{n'=1}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{nn'}^{tt'}(q, q') \Psi_{n'}^{t'}(q') dq'$$

Pour les ondes considérées il y a seulement cinq facteurs géométriques qui ne sont pas nuls (A.7) et compte tenu des valeurs de $\xi_{tt'}$ on a :

$$37 \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{nn'}^{11}(q, q') = \frac{4qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 du \int_{n0}^1(q, p) g_{n'0}^1(q', p') \\ K_{nn'}^{10}(q, q') = -\frac{12qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 du \int_{n0}^1(q, p) g_{n'0}^0(q', p') \\ K_{nn'}^{01}(q, q') = -\frac{12qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 du \int_{n0}^0(q, p) g_{n'0}^1(q', p') \\ K_{nn'}^{00}(q, q') = \frac{4qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 du \left(\int_{n0}^0(q, p) g_{n'0}^0(q', p') - \int_{n2}^0(q, p) g_{n'2}^0(q', p') h(q, u, q') \right) \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } h(q, u, q') = \frac{8}{27} (3q^4 + 3q'^4 + q^2 q'^2 (40 + \frac{59}{8} (3u^2 - 1) + 15qq'u (q^2 + q'^2)))$$

et :

$$p^2 = (q^2 + 4qq'u + 4q'^2)/3$$

$$p'^2 = (4q^2 + 4qq'u + q'^2)/3$$

Nous voyons que la contribution de $\ell = 2$ se fait de deux manières. D'une part elle intervient dans le calcul des états de Kapur-Peierls donc de f_{no}^0 et g_{no}^0 par l'intermédiaire de la force tensorielle, d'autre part elle donne le terme supplémentaire au quatrième noyau. En fait cette dernière contribution est faible et modifie de 0,5 MeV l'énergie de liaison.

En l'absence de force tensorielle, les contributions de $\ell = 2$ et $\ell = 0$ sont complètement découplées, par conséquent on cherchera le triton avec $\ell = 0$ plutôt qu'avec $\ell = 2$. Si dans ce cas, l'interaction utilisée est la même dans les deux ondes ($V_{\text{triplet pair}} = V_{\text{singulet pair}}$) alors les quatre noyaux de la relation 37 sont proportionnels. Le système 36 s'écrit alors :

$$38 \quad \begin{cases} \Psi_n^1(q) = \int_0^\infty dq' K_{nn'}^{11}(q, q') (\Psi_{n'}^1(q') - 3\Psi_{n'}^0(q')) \\ \Psi_n^0(q) = \int_0^\infty dq' K_{nn'}^{11}(q, q') (\Psi_{n'}^0(q') - 3\Psi_{n'}^1(q')) \end{cases}$$

Le système admet comme solutions possibles :

$$39 \quad \begin{cases} \Psi_n^1(q) = \Psi_n^0(q) \\ \Psi_n^1(q) = -\sum_{n'} 2 \int_0^\infty dq' K_{nn'}^{11}(q, q') \Psi_{n'}^1(q') \end{cases}$$

où :

$$40 \quad \begin{cases} \Psi_n^1(q) = -\Psi_n^0(q) \\ \Psi_n^1(q) = \sum_{n'} 4 \int_0^\infty dq' K_{nn'}^{11}(q, q') \Psi_{n'}^1(q') \end{cases}$$

$$\text{avec : } 4K_{nn'}^{11}(q, q') = \frac{16qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 \int_{n_0}^1 (q, p) g_{n'_0}(q, p') du$$

C'est cette dernière équation que nous avons résolue pour le problème des états liés de trois bosons comme on peut le voir sur les relations IV 56 , 57 . On pouvait trouver l'analogie entre ces deux problèmes à partir de l'équation 13 , mais ceci a fourni une vérification de plus pour le système 36 .

V.2.4 - Cas du potentiel de Reid : détails pratiques

Nous allons décrire en pratique comment se fait la recherche de la solution approchée du triton avec les hypothèses du paragraphe précédent :

- 1) Une fois choisi le potentiel on détermine les trajectoires des états de Kapur-Peierls.
- 2) On considère alors une valeur de l'énergie que l'on espère voisine de l'énergie de liaison cherchée. On détermine alors les n_1 et n_0 états de Kapur-Peierls pour les ondes $t = 1$ et $t = 0$ et ceci pour toutes les valeurs de $\xi_j = E - q_j^2$. Les N_q valeurs de q_j ont été choisies au mieux pour pouvoir remplacer l'intégrale sur q' de 0 à ∞ (36) par une somme discrète affectée de poids convenable W_j .
- 3) A partir de ces états de Kapur Peierls, on calcule les quantités $f_n^u(q_j, p)$ pour toutes valeurs de q_j et pour un certain nombre de valeurs de p de telle façon que l'intégrale sur u (37) puisse être effectuée avec précision.
- 4) On construit donc la matrice du système linéaire qui remplace 36 et qui a comme dimensions $N_q \times (n_0 + n_1)$. On calcule alors le déterminant. S'il n'est pas nul on choisit alors une nouvelle valeur de l'énergie (méthode de recherche du zéro de Newton par exemple) et on recommence en 2. S'il est nul, l'énergie de liaison est $-E$ et la fonction d'onde est obtenue à une constante près par la résolution du système homogène.

Toutes ces opérations sont effectuées automatiquement par un programme de 300 cartes écrit en Fortran qui dure environ une minute par énergie d'essai sur une IBM 360-65. Habituellement il faut 3 à 4 itérations pour obtenir la solution.

Dans un tel calcul le problème le plus délicat à résoudre est celui du choix de la discrétisation de l'intégration sur q' . L'étude de ce problème se fait en changeant le nombre de points N_q et leur position par un autre changement de variable pour passer de l'intervalle $[0 \quad \infty]$ à $[-1 \quad 1]$. Si de petits changements entraînent de petits

changements on n'a jamais obtenu une vraie stabilité. Pour de grands changements ($N_q = 8$ à 16 + changement de variable) l'énergie peut varier de 300 keV.

Nous avons considéré le potentiel de Reid (Re 68) à coeur mou. C'est un potentiel réaliste nucléon-nucléon dont la partie à longue portée est donnée par l'échange d'un pion.

$$t=0 \quad \begin{cases} V_c(x) = -\frac{\hbar e^{-x}}{x} + 105,468 \frac{e^{-1x}}{x} - 3187,8 \frac{e^{-4x}}{x} + 9924,3 \frac{e^{-6x}}{x} \\ V_T(x) = -\frac{\hbar}{x} \left(\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) e^{-x} - \left(\frac{11}{x} + \frac{3}{x^2}\right) e^{-4x} \right) + 351,77 \frac{e^{-4x}}{x} - 1673,5 \frac{e^{-6x}}{x} \\ V_{LS}(x) = 708,91 \frac{e^{-4x}}{x} - 271,3 \frac{e^{-6x}}{x} \end{cases}$$

$$t=1 \quad V_c(x) = -\frac{\hbar e^{-x}}{x} - 1650,6 \frac{e^{-4x}}{x} + 6484,2 \frac{e^{-7x}}{x}$$

avec $\hbar = 10,463 \text{ MeV}$

$$\mu = 0,7 \text{ Fermi} \quad x = \mu r$$

Nous avons fait d'abord un certain nombre de tests. En particulier nous trouvons l'énergie de liaison du deuton à $-2,232 \text{ MeV}$ alors que les auteurs donnent $-2,226 \text{ MeV}$. Nous avons fait aussi d'autres tests sur les quantités f et g et sur l'intégration sur u . Finalement pour un rayon de raccordement de 5 Fermi nous avons trouvé les résultats présentés dans le tableau :

nb d'états $t=0$	nb d'états $t=1$	$E(\text{MeV})$ Triton
2	1	- 7.400
3	2	- 7.126
4	3	- 7.012

L'énergie obtenue par Malfliet et Tjon est de -6.5 MeV avec les mêmes hypothèses et le même potentiel. Mais les résultats que nous présentons sont en fait le point de départ pour la méthode de relaxation.

Dans cette méthode le nombre d'états de projection comme le choix du rayon de raccordement n'interviennent pas.

V.3 - ETAT LIÉ DU TRITON PAR SOLUTION DU SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL

V.3.1.- Dérivation des équations intégrales

La dérivation du système intégral-différentiel est très simple. Le point de part est encore l'équation 23 :

$$40 \quad (E - H_0 - V_1^t) \Psi_t(1,2,3) = \sum_{t'} \varepsilon_{tt'} V_1^t \Psi_{t'}(2,3,1)$$

On introduit de la même manière la base complète des ondes sphériques libres pour le mouvement relatif 1-23 et les fonctions d'angle et de spin pour le système (2-3) soit donc :

$$(\vec{y}_1, l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1) i^{l_1} Y_{l_1, \Lambda_1, \mu_1}^{m_1}(\hat{x}_1)$$

et leur combinaison linéaire :

$$41 \quad \Phi_{l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1}^{t, m}(\hat{x}_1, \vec{y}_1, q_1) = \sum_{m_1, \mu_1} \langle j, m_1, \Lambda_1, \mu_1 | j, m \rangle (\vec{y}_1, l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1) i^{l_1} Y_{l_1, \Lambda_1, \mu_1}^{m_1}(\hat{x}_1)$$

Ces fonctions forment une base pour toute fonction de spin de trois particules, pour toute fonction de $\hat{x}_1$ et de $\vec{y}_1$. On écrira sachant que notre problème est l'étude du triton de spin 1/2.

$$42 \quad \Psi_t(1,2,3) = \sum_{l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1} \int_0^\infty dq_1 \Phi_{l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1}^t(\hat{x}_1, \vec{y}_1, q_1) \Psi_{l_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1}^t(x_1, q_1) / x_1$$

On peut alors utiliser ce développement dans l'équation 40 avec pour H_0 l'expression I 7. En utilisant l'orthogonalité des fonctions on obtient :

$$43 \quad \sum_{t'} \left((E - q_1^2 - \frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x_1^2}) \delta_{\ell_1 \ell_1'} - V_{\ell_1 \ell_1'}^{t, t'}(x_1) \right) \Psi_{\ell_1', \Lambda_1', \mu_1', q_1'}^t(x_1, q_1) = \sum_{t'} \varepsilon_{tt'} \dots$$

$$\dots \langle \Phi_{\ell_1, \Lambda_1, \mu_1, q_1}^t(\hat{x}_1, \vec{y}_1, q_1) V_{\ell_1}^t(\vec{x}_1) \Psi_{\ell_1}(2,3,1) \rangle$$

où le symbole $\langle \quad \rangle$ signifie le produit scalaire des fonctions de spin, l'intégrale sur $d\vec{y}_1$ et sur $d\hat{x}_1$.

En utilisant pour $\Psi_{t'}(2,3,4)$ le développement 42 on obtient un système d'équations intégrales où nous avons remplacé l'intégrale sur y_1 par celle sur x_2 :

$$44 \quad \sum_{e_1} \left(\delta_{e_1 e_1'} \left(\varepsilon_{q_1}^* \frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{e_1(q_1)}{x_1} \right) - V_{e_1 e_1'}^{2,3}(x_1) \right) \Psi_{e_1, j_1, h_1, \lambda_1}^t(x_1, q_1) = \sum_{t_1, e_2} \varepsilon_{t_1 t'} \dots$$

$$\dots \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dq_2 W_{e_1, j_1, h_1, \lambda_1}^{t t'}(x_1, q_1, x_2, q_2) \Psi_{e_2, j_2, h_2, \lambda_2}^{t'}(x_2, q_2)$$

où le potentiel de couplage est donné par :

$$45 \quad W = \frac{x_1 x_2}{(2\pi)^3} \int d\hat{x}_1 \int d\hat{x}_2 \Phi_{e_1, j_1, h_1, \lambda_1}^{t*}(\hat{x}_1, \vec{y}_1, q_1) V_1^t(\vec{x}_1) \Phi_{e_2, j_2, h_2, \lambda_2}^{t'}(\hat{x}_2, \vec{y}_2, q_2)$$

V.3.2 - Etude du potentiel de couplage

$V_1^t(x_1)$ n'agissant que sur le mouvement relatif 2,3 et étant diagonal dans les états propres de j_1^2 , s_1^2 , t^2 on peut aussi écrire (relation 18b)

$$46 \quad W = \sum_{t_1} V_{e_1}^{2,3}(x_1) \frac{x_1 x_2}{(2\pi)^3} \int d\hat{x}_1 \int d\hat{x}_2 \Phi_{e_1, j_1, h_1, \lambda_1}^{t*}(\hat{x}_1, \vec{y}_1, q_1) \Phi_{e_2, j_2, h_2, \lambda_2}^{t'}(\hat{x}_2, \vec{y}_2, q_2)$$

expression dans laquelle on a séparé la partie physique de la partie géométrique que l'on a réduite en appendice A.9. Finalement on obtient :

$$47 \quad W = \sum_{e_1} V_{e_1}^{2,3}(x_1) \frac{3\varepsilon_{q_1} q_1}{3\sqrt{3}} \int_{-1}^1 du K_{e_1, j_1, h_1, \lambda_1}^{1/2}(q_1, u, q_1) x_1 x_2 \bar{p}_1^{e_1} j_{e_1}^{j_1}(p_1, x_1) \bar{p}_2^{e_2} j_{e_2}^{j_2}(p_2, x_2)$$

le coefficient K avait déjà été introduit, quant à p_1 et p_2 ils sont fonctions de q_1 , q_2 et u comme on peut le voir sur les relations

IV 44 .

NB : Le symbole $*$ indique que l'on doit prendre le complexe conjugué des fonctions d'espaces et les bras des fonctions de spin.

Si on fait les mêmes hypothèses sur la fonction d'onde du triton que dans la section précédente, alors seulement trois termes apparaissent dans le développement 43. Nous noterons alors d'une manière abrégée :

$$\begin{aligned}\Psi_e^t(x, q) &= \Psi_{\ell\lambda\lambda\lambda\lambda}^t(x, q) \\ \Psi_0^1(x, q) &= \Psi_{000001\lambda}^0(x, q) \\ \Psi_0^0(x, q) &= \Psi_{01101\lambda}^0(x, q) \\ \Psi_2^0(x, q) &= \Psi_{21101\lambda}^0(x, q)\end{aligned}$$

De la même manière les seuls éléments de matrice de l'interaction qui apparaîtront seront notés par V^1 plutôt que par $V_{\ell\ell'}^1$ (relation 18b). Considérant alors les cinq coefficients géométriques non nuls ainsi que les valeurs de $\xi_{tt'}$; le système 44 s'écrit de manière détaillée :

$$\left\{ \begin{aligned} (E - q^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - V_{00}^1(x)) \Psi_0^1(x, q) &= V_{00}^1(x) \int_0^\infty \int_0^\infty dq' N_0(x, q, x', q') (\Psi_0^1(x', q') - 3\Psi_0^0(x', q')) \\ (E - q^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - V_{00}^0(x)) \Psi_0^0(x, q) &= V_{00}^0(x) \int_0^\infty \int_0^\infty dq' N_0(x, q, x', q') (\Psi_0^0(x', q') - 3\Psi_0^1(x', q')) \dots \\ &\dots + V_{20}^0(x) (\Psi_2^0(x, q) \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty dq' N_2(x, q, x', q') \Psi_2^0(x', q')) \\ (E - q^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - V_{22}^0(x) - \frac{6}{x^2}) \Psi_2^0(x, q) &= V_{22}^0(x) \int_0^\infty \int_0^\infty dq' N_2(x, q, x', q') \Psi_2^0(x', q') \dots \\ &\dots + V_{20}^0(x) (\Psi_0^0(x, q) + \int_0^\infty \int_0^\infty N_0(x, q, x', q') (\Psi_0^0(x', q') - 3\Psi_0^1(x', q')) dx' dq') \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_0(x, q, x', q') &= \frac{4qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(p x) \sin(p' x')}{p p'} du \\ N_2(x, q, x', q') &= -\frac{4qq'}{3\sqrt{3}\pi} \int_{-1}^1 h(q, u, q') \frac{j_2(p x) j_2(p' x')}{p' p^2} du \\ h(q, u, q') &= \frac{8}{x^2} (3q^4 + 3q^4 + q^4 q'^2 (10 + \frac{59}{8} (3u^2 - 1)) + 15qq'u (q^2 + q'^2)) \\ p^2 &= (q^2 + 4qq'u + 4q'^2) / 3 \\ p'^2 &= (4q^2 + 4qq'u + q'^2) / 3 \end{aligned} \right.$$

Sur l'expression détaillée ci-avant on peut voir tous les avantages du système intégro-différentiel.

- Il y a en premier lieu les avantages déjà signalés de l'équation différentielle sur l'équation intégrale.
- Ensuite on voit apparaître directement les potentiels sans que soit nécessaire de faire de calcul préalable et qui plus est les potentiels dans l'espace de configuration. Dans l'expression ci-dessus ils ont été pris locaux pour la clarté de l'exposé, mais ceci n'est nullement nécessaire. Ils peuvent d'autre part être singuliers et l'espace de configuration et le plus adapté pour les étudier correctement.
- Le troisième avantage est de voir apparaître directement l'énergie. Ceci permet d'utiliser des algorithmes de recherche de l'état lié, telle la méthode de relaxation présentée à la fin du Chapitre IV.

CONCLUSION

Dans les trois derniers chapitres nous avons présenté une méthode de résolution des équations de Faddeev. Cette méthode a les particularités suivantes :

- Les équations de Faddeev sont habituellement écrites sous la forme d'équations intégrales. Ici, par projection sur l'espace de configuration plutôt que celui d'impulsions, on a écrit les équations de Faddeev sous forme d'équations intégral-différentielles. Par discrétisation des intégrales on est ramené à des équations différentielles couplées.

- Une solution approchée de ce système est obtenue par projection sur un nombre limité d'états de Kapur-Peierls définis pour chaque paire. Ces états sont définis à partir d'un rayon d'interaction qui, dans le formalisme de Noyes, délimite l'espace en deux régions intérieure et extérieure.

- Par des méthodes de relaxation le système d'équations différentielles couplées est résolu en partant de la solution approchée précédente.

La méthode proposée a certains avantages qui sont dus à l'utilisation de l'espace de configuration et aux propriétés des équations différentielles :

- L'énergie apparaît explicitement, comme dans un problème de valeurs propres d'équations différentielles pour lesquelles il existe de nombreuses méthodes de résolution.

- Le potentiel apparaît lui aussi de manière explicite et non

la matrice de l'opérateur de transition à deux corps qui nécessite la résolution au préalable de l'équation de Lippman Schwinger.

- Le potentiel est écrit dans l'espace de configuration. Ceci est particulièrement avantageux pour la plupart des potentiels réalistes qui sont locaux et dont les expressions dans l'espace d'impulsions sont compliquées. Ce dernier point est essentiel pour des potentiels ayant des singularités comme un coeur infiniment répulsif.

- Spécialement pour les états liés, la fonction d'onde décroît plus vite dans l'espace de configuration que dans l'espace d'impulsion. On peut ainsi limiter le problème à quelques dizaines de Fermi. D'autre part, dans cet espace les observables sont faciles à calculer.

- L'avantage le plus important est la description de la fonction d'onde par trente à quarante fois plus d'informations que par les méthodes classiques. En effet ces dernières conduisent à des systèmes linéaires, donc à de grandes matrices. Les équations différentielles se résolvent avec beaucoup plus de précision et de rapidité par des méthodes de relaxation pour lesquelles on a besoin de garder dans les mémoires rapides de l'ordinateur seulement la solution.

Nous disposons donc d'une méthode assez élaborée pour connaître la fonction d'onde d'un système de trois nucléons avec une bonne résolution. On peut donc envisager maintenant de discriminer différents potentiels, équivalents sur la couche d'énergie, par leurs effets hors de la couche sur les observables du triton. On peut aussi rechercher un potentiel qui rende compte aussi bien de l'interaction nucléon-nucléon, que du triton ou de la diffusion neutron-deuton.

Une étude préliminaire nous a permis d'étudier le potentiel de Reid avec un coeur mou. L'énergie de liaison trouvée a été de 7 MeV, légèrement supérieure à l'estimation de Malfliet et Tjon (6,7 MeV). La valeur expérimentale est 8.48 MeV.

Si cette méthode peut permettre de traiter théoriquement des potentiels à coeur dur, le nombre d'informations pratiquement disponi-

bles est cependant encore insuffisant pour décrire alors la fonction d'onde. Pour tenir compte de manière correcte des corrélations à courte portée il semble nécessaire de traiter le problème complètement dans l'espace de configuration. L'équation que l'on obtient, proposée il y a déjà longtemps par Noyes, peut être un bon point de départ pour une résolution directe de ce problème.

A.1 - CINEMATIQUE DE TROIS CORPS

Nous prenons les conventions de Lovelace. On définit les distances relatives par :

$$\vec{x}_i = \frac{\sqrt{2m_j m_k}}{h_i(m_j + m_k)} (\vec{R}_j - \vec{R}_k)$$

$$\vec{y}_i = \frac{\sqrt{2m_i(m_j + m_k)}}{h_i(m_i + m_j + m_k)} \left(\frac{m_j \vec{R}_j + m_k \vec{R}_k}{m_j + m_k} - \vec{R}_i \right)$$

après un calcul trivial on déduit les relations :

$$\vec{x}_i = \alpha_{ij} \vec{x}_j + \beta_{ij} \vec{y}_j$$

$$\vec{y}_i = -\beta_{ij} \vec{x}_j + \alpha_{ij} \vec{y}_j$$

avec $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = -\sqrt{\frac{m_i m_j}{(m_i + m_k)(m_j + m_k)}}$

et

$\beta_{ij} = -\beta_{ji}$; si i et j sont dans l'ordre naturel on a :

$$\beta_{12} = -\sqrt{\frac{(m_i + m_j + m_k) m_k}{(m_i + m_k)(m_j + m_k)}}$$

On définit aussi les impulsions relatives qui se transforment par la même loi :

$$\vec{p}_i = \frac{m_k \vec{P}_j - m_j \vec{P}_k}{\sqrt{2m_j m_k (m_j + m_k)}} \quad \vec{q}_i = \frac{m_i (\vec{P}_j + \vec{P}_k) - (m_j + m_k) \vec{P}_i}{\sqrt{2m_i (m_j + m_k) (m_i + m_j + m_k)}}$$

On vérifie facilement que l'énergie cinétique du mouvement relatif j-k est p_j^2 :

$$p_j^2 = \frac{1}{2 \left(\frac{m_j m_k}{m_j + m_k} \right)} \left(\frac{m_k \vec{P}_j - m_j \vec{P}_k}{m_j + m_k} \right)^2$$

A.2 - POTENTIEL SEPARABLE DE YAMAGUCHI

Ce potentiel est défini par :

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = -g(p)g(p')$$

$$g(p) = C / (p^2 + \gamma^2)$$

On peut alors calculer l'intégrale qui apparaît dans le terme central de la matrice de transition I 32

$$\tau(E) = \left(1 + \int \frac{g^2(p) d\vec{p}}{E + i\epsilon - p^2} \right)^{-1}$$

avec :

$$\int \frac{g^2(p) d\vec{p}}{E + i\epsilon - p^2} = 4\pi C^2 \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(p^2 + \gamma^2)^2 (E + i\epsilon - p^2)} = - \frac{\pi^2 C^2}{\gamma(\gamma - i\sqrt{E})^2}$$

On a la relation liant les paramètres C et γ en disant que la matrice de transition doit avoir un pôle à l'énergie de liaison $E = -\xi = -\alpha^2$. D'autre part son résidu, d'après I 37, nous donne la quantité $\langle g | \psi \rangle$ d'où :

$$1 = \frac{\pi^2 C^2}{\gamma(\gamma + \alpha)^2} \quad \langle g | \psi \rangle^2 = \alpha(\gamma + \alpha)$$

d'où l'expression de la matrice de transition :

$$T(\vec{p}, E, \vec{p}') = -g(p) \left(1 - \left(\frac{\gamma + \alpha}{\gamma - i\sqrt{E}} \right)^2 \right)^{-1} g(p')$$

Avec la normalisation des ondes planes et dans les unités considérées on a :

$$p \cot \delta = ip + 1/f$$

$$f = \text{amplitude de transition} = -2\pi^2 T(\vec{p}, p^2, \vec{p})$$

$$p \cot \delta = ip - \frac{(r + ip)^2 (\alpha + ip)(2\gamma + \alpha - ip)}{2\gamma(\gamma + \alpha)^2}$$

$$p \cot \delta = -1/\alpha + 2_0 p^2/2 - P_2^0 p^4 + Q_2^0 p^6$$

on identifie pour trouver :

$$a = \alpha\gamma(\alpha + 2\gamma) / 2(\gamma + \alpha)^2$$

$$r_0 = ((\alpha + \gamma)^2 + 2\gamma^2) / \gamma(\gamma + \alpha)^2$$

$$p_{r_0}^2 = -1 / 2\rho(\alpha + \beta)^2$$

$$Q = 0$$

On peut obtenir une relation entre les paramètres si on ignore a, r_0 etc... en se donnant le rayon carré moyen de la fonction d'onde de l'état lié.

Dans l'espace de configuration cette fonction d'onde s'écrit :

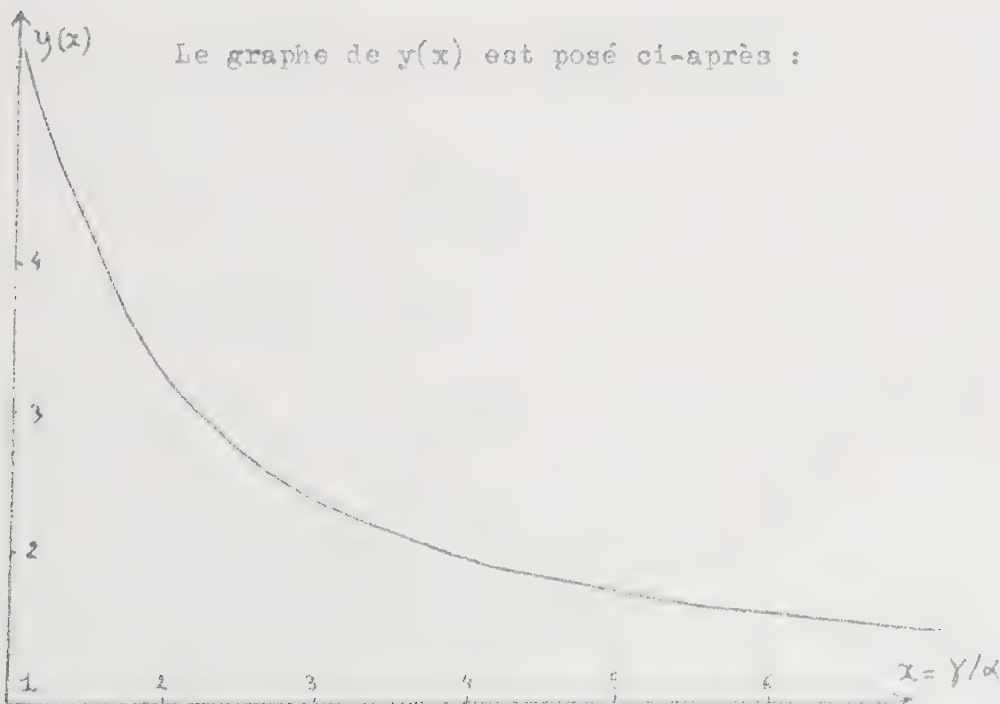
$$\psi(r) = N(e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}) / r$$

La norme se calcule facilement ; on trouve : $4\pi N^2 = \frac{2\alpha\gamma(\alpha + \gamma)}{(\alpha - \gamma)^2}$

$$\bar{r}^2 = 4\pi N^2 \int_0^\infty (e^{-\alpha r} - e^{-\beta r})^2 r^2 dr = 4\pi N^2 \left(\frac{1}{(\alpha)^3} + \frac{1}{(\beta)^3} - \frac{2}{(\alpha\beta)^3} \right)$$

$$\bar{r}^2 = \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 5}{2\alpha^2 x^2 (x+1)^2} = \frac{y(x)}{2\alpha^2}$$

avec : $x = \gamma/\alpha$



A.3 - EXPRESSION DETAILLEE DU NOYAU DES EQUATIONS INTEGRALES

D'après (11), (12) et (13) :

$$K_{ij}^e(q_i, q_j) = \frac{2\pi G_1 G_2}{|p_{ij}|^3} \int_{-1}^1 \frac{P_e(u) du}{(p_i^2 + y_i^2)(p_j^2 + q_j^2 - E)(p_j^2 + y_j^2)}$$

$$p_i^2 = (q_i^2 - 2\alpha_{ji} q_i q_j u + \alpha_{ji}^2 q_i^2) / \beta_{ji}^2$$

$$p_j^2 = (q_j^2 - 2\alpha_{ji} q_i q_j u + \alpha_{ji}^2 q_j^2) / \beta_{ji}^2$$

On a donc à intégrer sur u une expression de la forme $\int_{-1}^1 \frac{P_e(u)}{(a-u)(b-u)(c-u)} du$ ce qui fait apparaître les fonctions de Legendre de 2° espace. On obtient finalement :

$$\frac{2\pi G_1 G_2}{|p_{ij}|^3 (\alpha_{ji} q_i q_j)^3} \left\{ \frac{Q_e(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{Q_e(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{Q_e(c)}{(c-a)(c-b)} \right\}$$

avec :

$$a = (\beta_{ji}^2 y_i^2 + q_j^2 + \alpha_{ji}^2 q_i^2) / 2q_i q_j \alpha_{ji}$$

$$b = (\beta_{ji}^2 y_j^2 + q_i^2 + \alpha_{ji}^2 q_j^2) / 2\alpha_{ji} q_i q_j$$

$$c = (q_i^2 + q_j^2 - p_{ij}^2 \sqrt{E}) / 2\alpha_{ji} q_i q_j$$

Les singularités qui apparaissent sont celles des fonctions de Legendre. Elles ont lieu lorsque l'argument vaut ± 1 et elles sont de type logarithmique comme on peut le voir sur Q_0 :

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Comportement asymptotique

Lorsque x tend vers ∞ les fonctions de Legendre décroissent plus vite que $1/x$. Il s'ensuit que l'on a :

$$K_{ij}^e(q_i, q_j) \sim q_i^{-6} \text{ ou } q_j^{-6}$$

A.4 - DETERMINATION DE FACTEUR GEOMETRIQUE $K_{\ell_1 \ell_1 \ell_2 \ell_2}^{L L} (q_1, q_2)$

L'expression IV 45 de K se réduit en utilisant la relation IV 40 ainsi que la relation suivante

$$Y_{\ell}^m(\hat{r}_1 + \hat{r}_2) = (-1)^m (\hat{r}_1 \hat{r}_2)^{-1} \sum_{\ell_1 \ell_2 = \ell} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} D(\ell_1 \ell_2 \ell) \sum_{m_1 m_2} \binom{\ell_1 \ell_2 \ell}{m_1 m_2 - m} Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{r}_1) Y_{\ell_2}^{m_2}(\hat{r}_2)$$

avec

$$D(\ell_1 \ell_2 \ell) = (4\pi (2\ell_1 + 1) (2\ell_2 + 1) / ((2\ell + 1) (2\ell_1 + 1) (2\ell_2 + 1)))^{1/2}$$

en posant $\alpha = \alpha_{ij}$ et $\beta = \beta_{ij}$, l'expression de K devient

$$K_{\ell_1 \ell_1 \ell_2 \ell_2}^{L L} (q_1, q_2) = (-1)^{L+L'+M+M'} \frac{r_1^{L+L'+L+L'+M+M'}}{(2L+1)(2L'+1)} \sum_{p_1+k_1=\ell_1} \sum_{p_2+k_2=\ell_2} \left(\frac{\alpha q_1}{\rho}\right)^{p_1} \left(\frac{-q_2}{\rho}\right)^{k_1} \dots$$

$$\dots D(p_1 k_1 \ell_1) \left(\frac{-\alpha q_1}{\rho}\right)^{p_2} \left(\frac{q_2}{\rho}\right)^{k_2} D(p_2 k_2 \ell_2) \sum_{m_1 m_2} \binom{\ell_1 \ell_2 L}{p_1 m_1 - M} \binom{\ell_2 \ell_2 L'}{p_2 m_2 - M'} \dots$$

$$\dots \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \left(\frac{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}}{r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2}} \right) \dots$$

$$\dots Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{q}_1) Y_{\ell_2}^{m_2}(\hat{q}_2) Y_{\ell}^{m}(\hat{q}) Y_{\ell_1}^{m_1}(\hat{q}_1) Y_{\ell_2}^{m_2}(\hat{q}_2) Y_{\ell}^{m}(\hat{q}) \dots$$

On recoupe les harmoniques sphériques d'ordre ℓ_1 et ℓ_2 à u_1 et u_2 et ℓ à u et on intègre sur les directions $\hat{q}_1$ et $\hat{q}_2$. On peut alors faire apparaître des coefficients $\{G_j\}$ et on obtient :

$$K_{\ell_1 \ell_1 \ell_2 \ell_2}^{L L} (q_1, q_2) = \frac{\delta_{LL'} \delta_{MM'}}{\rho_{\ell_1 \ell_2}} (-1)^{L+L'+M+M'} \sum_{p_1+k_1=\ell_1} \sum_{p_2+k_2=\ell_2} \sum_{u_1, u_2} \frac{r_1^{p_1+k_1} r_2^{p_2+k_2}}{(2L+1)(2L'+1)} D(p_1 k_1 \ell_1) \dots$$

$$\dots D(p_2 k_2 \ell_2) (k_1 \ell_1 u_1) (k_2 \ell_2 u_2) (L \ell u) (L' \ell' u') \dots$$

$$\dots \left\{ \begin{matrix} k_1 u_1 L \\ \ell_1 \ell_1 p_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_2 u_2 L \\ \ell_2 \ell_2 p_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L u \\ \ell_1 \ell_1 \ell_2 \end{matrix} \right\}$$

avec $C(l_1 l_2 l_3) = ((l_1+1)(l_2+1)(l_3+1)/4\pi)^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

des relations triangulaires des $3j$ et $6j$ montrent que

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \text{ pair}$$

$$l \leq k_1 + u_1 \quad l \leq k_1 + u_2$$

$$\text{d'où} \quad 2l \leq k_1 + u_1 + k_1 + u_2 \leq 2L \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

On voit aussi que K est un polynôme homogène de degré $l_1 + l_2$ en q_1 et q_2 .

Cas $l_1 = l_2 = 0$ - les coefficients géométriques se simplifient :

$$K_{l_1=0, l_2=0}^L(q_1, q_2) = \frac{\delta_{l,L} \delta_{l_2,L} (-1)^l}{4\pi (2L+1) (p_2!)^{2L}} \sum_{\substack{p_1+k_1=L \\ p_2+k_2=L}} q_1^{p_1+k_1} q_2^{p_2+k_2} (-q_2)^{p_1+p_2} \dots$$

$$\dots D(p_1 k_1 L) D(p_2 k_2 L) C(k_2 l p_1) C(k_1 l p_2) \left\{ \begin{matrix} k_2 & p_2 & L \\ k_1 & p_1 & L \end{matrix} \right\}$$

Si $L=0$. De la définition ou de l'expression précédente on a :

$$K_{l_1=0, l_2=0}^0(q_1, q_2) = \delta_{l,0} / 4\pi$$

$K_{l_1, l_2, l, p_1, p_2, k_1, k_2}^L(q_1, q_2)$						
L	l_1	l_2	l	p_1	p_2	k_1
0	0	0	0	0	0	$1/4\pi$
2	2	0	0	2	0	$(3q_1^4 + 3q_2^4 + 10q_1^2 q_2^2) / 27\pi$
2	2	0	1	2	0	$15(q_1 q_2^3 + q_1^3 q_2) / 27\pi$
2	2	0	2	2	0	$59 q_1^2 q_2^2 / (4 \times 27 \times \pi)$

A.5 - VALEUR DU COEFFICIENT $K_{l_1 l_1 l_2 l_2}^L(q_1, u, q_2)$

$$K_{l_1 l_1 l_2 l_2}^L(q_1, u, q_2) = \sum_e P_e(u) K_{l_1 l_1 l_2 l_2}^L(q_1, q_2)$$

Valeurs particulières

$$l_1 = l_1 = l_2 = l_2 = L = 0$$

$$1 / 4\pi$$

$$l_1 = 2 = l_2 = L \quad l_1 = l_2 = 0$$

$$(3(q_1^2 + q_2^2) + 10 q_1^2 q_2^2 + 15 q_1 q_2 u (q_1^2 + q_2^2) + \frac{59}{8} q_1^2 q_2^2 (3u^2 - 1)) / 27\pi$$

A.6 - CALCUL DU POTENTIEL DE COUPLAGE POUR TROIS PARTICULES SANS SPIN

Pour réduire l'expression du potentiel de couplage, on utilise l'expression IV 27 des ondes sphériques. On exprime alors les directions en fonction de $\vec{x}_i$ et $\vec{x}_j$. Comme dans le calcul du noyau au chapitre IV, on voit apparaître les ondes planes $e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}_i}$ que l'on décompose en harmoniques sphériques. finalement il vient :

$$V_{l_1 l_1 l_2 l_2}^L(x_1, q_1, x_2, q_2) = \frac{V(x_1) x_1 x_2}{|p_{ij}|^3} \frac{2}{\pi} \int d\hat{q}_i \int d\hat{q}_j \sum_{l_i l_i} Y_{l_i l_i}^{LM*}(\hat{q}_i, \hat{p}_i) j_{l_i}(p_i x_i) \dots$$

$$\dots j_{l_j}(p_j x_j) Y_{l_j l_j}^{LM'}(\hat{q}_j, \hat{p}_j)$$

p_i et p_j dependent du cosinus de l'angle formé par $\vec{q}_i$ et $\vec{q}_j$

$$p_i^{l_i} j_{l_i}(p_i x_i) p_j^{l_j} j_{l_j}(p_j x_j) = 2\pi \sum_{e_m} Y_e^m(\hat{q}_i) Y_e^{m*}(\hat{q}_j) \int P_e(u) du \dots$$

$$\dots j_{\ell_1}(p_1(u)x_1) j_{\ell_2}(p_2(u)x_2) p_1(u)^{-\ell_1} p_2(u)^{-\ell_2}$$

ou $p_1(u)$ et $p_2(u)$ sont donnés par la formule IV 44.

On voit donc apparaître le facteur géométrique défini par IV 46 et calculé dans l'appendice précédent. Finalement :

$$V_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^L(x_1, q_1; x_2, q_2) = 4 \frac{V_1(x_1)x_1x_2}{|P_0|^3} \int_{-1}^1 du P_\ell(u) \frac{j_{\ell_1}(p_1(u)x_1) j_{\ell_2}(p_2(u)x_2)}{p_1(u)^{\ell_1} p_2(u)^{\ell_2}} \dots$$

$$\dots K_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^L(x_1, q_1; x_2, q_2)$$

A.7 - CAS DU TRITON - CALCUL DU NOYAU

Comme dans la réduction du noyau pour trois particules sans spin, on utilise l'expression I 27b des ondes sphériques pour pouvoir faire apparaître les quantités $e^{i\vec{p}\vec{x}}$. La décomposition des ondes planes en ondes sphériques fait apparaître après intégration sur $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ les quantités f et g définies par V 33.

$$K_{n_1 n_2 \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{t t'}(q_1, q_2) = \frac{2 q_1 q_2}{|P_0|^3 \pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle \ell_1 \mu_1 \ell_2 \mu_2 | 1 M \rangle \dots$$

$$\dots \langle \ell_3 \mu_3 \ell_4 \mu_4 | 1 M \rangle \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 f_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{t'}(q_1, p_1) g_{\ell_2 \ell_3 \ell_4}^{t'}(q_2, p_2) \dots$$

$$\dots Y_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1}(\hat{p}_1) p_1^{\ell_1} Y_{\ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m_2}(\hat{q}_1) Y_{\ell_3 \ell_4 \ell_5}^{m_3}(\hat{p}_2) p_2^{\ell_2} Y_{\ell_4 \ell_5 \ell_6}^{m_4}(\hat{q}_2)$$

On peut alors analyser le produit $f.g$ en polynomes de Legendre.
Il restera alors à effectuer l'intégration sur $\hat{q}_1$ et $\hat{q}_2$

$$\sum_{\substack{m_1 p_1 \\ m_2 p_2 \\ l}} \int d\hat{q}_1 \int d\hat{q}_2 \sum_m Y_{l_1 p_1}^{m_1}(\hat{q}_1) Y_{l_2 p_2}^{m_2}(\hat{q}_2) Y_{l_1 p_1}^m(\hat{q}_1) Y_{l_2 p_2}^m(\hat{q}_2) Y_{l_1 p_1}^{m_1}(\hat{q}_1) Y_{l_2 p_2}^{m_2}(\hat{q}_2) Y_{l_1 p_1}^{m_1}(\hat{q}_1) Y_{l_2 p_2}^{m_2}(\hat{q}_2) \\ \dots \langle l_1 p_1 j_1 m_1 | JM \rangle \langle l_2 p_2 j_2 m_2 | JM \rangle P_l(u)$$

Le calcul se fait en changeant de couplage. (LS au lieu de jj)
Il apparaît alors un produit de fonctions de spin et le
facteur géométrique calculé en A5. Finalement cette quantité
s'écrit :

$$K^J(q_1, u, q_2) = \sum_{\substack{l_1 p_1 j_1 l_2 p_2 j_2 l_1 l_2 \\ LS}} A \left\{ \begin{matrix} l_1 \frac{1}{2} l_1 \\ l_1 p_1 j_1 \\ LS J \end{matrix} \right\} A \left\{ \begin{matrix} l_2 \frac{1}{2} l_2 \\ l_2 p_2 j_2 \\ LS J \end{matrix} \right\} \sqrt{(2s_1+1)(2s_2+1)} \dots \\ \dots (-)^{s_2} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \frac{1}{2} s_1 \\ \frac{1}{2} S s_2 \end{matrix} \right\} K^L(q_1, u, q_2)_{l_1 l_2 l_1 l_2}$$

$J=1/2$ $K(q_1, u, q_2)$										$K^L(q_1, u, q_2)$					
l_1	s_1	j_1	l_2	p_1	l_1	p_2	j_2	l_1	l_2	l_1	l_2	l_1	l_2	l_1	l_2
0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2	-1/2	0	0	0	0	-1/8π
0	1	1	0	1/2	0	1	1	0	1/2	-1/2	0	0	0	0	-1/8π
0	1	1	0	1/2	0	0	0	0	1/2	√3/2	0	0	0	0	√3/8π
0	0	0	0	1/2	0	1	1	0	1/2	-√3/2	0	0	0	0	-√3/8π
2	1	1	0	1/2	2	1	1	0	1/2		2	0	2	2	$K_{40,20}^0(q_1, u, q_2)$

A.8 - REMARQUES SUR LES COEFFICIENTS f et E

Dans l'expression de g on peut partager l'intégrale en deux : l'une de 0 à a l'autre de a à ∞ . On définit ainsi les quantités g_1 et g_2 . On a d'autre part les deux équations :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) x g_\ell(px) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + E - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) u_{n\ell}^+(x) = \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'}^{n\ell}(x) u_{n\ell'}^+(x) \quad x \geq a$$

La méthode du Wronskien permet d'obtenir immédiatement

$$g_{2n\ell}^+(q, p) = \frac{-W(xg_\ell, u_{n\ell}^+, a) + \sum_{\ell'} \int_a^\infty x g_\ell(px) V_{\ell\ell'}^{n\ell}(x) u_{n\ell'}^+(x) dx}{(\varepsilon - p^2)(\varepsilon - E_{n\ell}^+(\varepsilon)) p^\ell}$$

le numérateur reste fini ; par contre au dénominateur on a la quantité $\varepsilon - p^2$ ou $\varepsilon - p^2 - q^2$ qui donnera des singularités logarithmiques après intégration sur u .

On peut répéter la méthode précédente pour la région intérieure $x < a$ en remplaçant E par $E_{n\ell}^+(\varepsilon)$, il vient alors :

$$g_{1n\ell}^+(q, p) = \frac{W(xg_\ell, u_{n\ell}^+, a) + \int_0^a x g_\ell(px) V_{\ell\ell'}^{n\ell}(x) u_{n\ell'}^+(x) dx}{(E_{n\ell}^+(\varepsilon) - p^2)(\varepsilon - E_{n\ell}^+(\varepsilon)) p^\ell}$$

A.9 - POTENTIEL DE COUPLAGE - CAS DU TRITON

Pour réduire l'expression II 45, on doit utiliser l'expression détaillée de Φ_{p_j, Λ_j}^t (V 44) ainsi que l'expression II 25 b des ondes sphériques. En utilisant alors les vecteurs $\hat{x}_i$ et $\hat{x}_j$, on a

$$\frac{e_i e_j}{|\beta_j|^3} \frac{q_i q_j}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{m_i, p_i \\ m_j, p_j}} \langle j, m_i, \Lambda_i, p_i | \frac{1}{2} M \rangle \langle j, m_j, \Lambda_j, p_j | \frac{1}{2} M \rangle Y_{\Lambda_i, m_i}^{*}(\hat{q}_i) Y_{\Lambda_i, m_i}(\hat{x}_i) \dots \\ \dots e^{-i \vec{p}_i \cdot \vec{x}_i} e^{-i \vec{p}_j \cdot \vec{x}_j} Y_{\Lambda_i, m_i}(\hat{q}_i) Y_{\Lambda_j, m_j}(\hat{x}_j) d\hat{q}_i d\hat{q}_j x_i x_j d\hat{x}_i d\hat{x}_j$$

On peut alors développer les ondes planes en ondes sphériques et intégrer sur les directions de $\hat{x}_i$ et $\hat{x}_j$:

$$\frac{2 q_i q_j x_i x_j}{\pi |\beta_j|^3} \sum_{\substack{m_i, p_i \\ m_j, p_j}} \langle j, m_i, \Lambda_i, p_i | \frac{1}{2} M \rangle \langle j, m_j, \Lambda_j, p_j | \frac{1}{2} M \rangle Y_{\Lambda_i, m_i}^{*}(\hat{q}_i) P_{\Lambda_i}^{e_i} Y_{\Lambda_j, m_j}^{*}(\hat{p}_j) \dots \\ \dots Y_{\Lambda_i, m_i}(\hat{q}_i) P_{\Lambda_j}^{e_j} Y_{\Lambda_j, m_j}(\hat{p}_j) \frac{j_{\Lambda_i}(p_i x_i)}{p_i^{e_i}} \frac{j_{\Lambda_j}(p_j x_j)}{p_j^{e_j}} d\hat{q}_i d\hat{q}_j$$

On analyse en polynôme de Legendre le produit des deux fonctions de Bessel et on voit apparaître le coefficient géométrique précédent:

$$\rightarrow \frac{4 q_i q_j}{|\beta_j|^3} \int_{-1}^1 du K^{\frac{1}{2}}(q_i, u, q_j) x_i \frac{j_{\Lambda_i}(p_i(u) x_i)}{p_i(u)^{e_i}} x_j \frac{j_{\Lambda_j}(p_j(u) x_j)}{p_j(u)^{e_j}}$$

REFERENCES

- Am 63 R.D. AMADO, Phys. Rev. 132, 485 (1963).
- Ba 66 J.L. BASDEVANT - Thèse Strasbourg 1966.
- Ba 68 J.S. BALL and D.Y. WONG, Phys. Rev. 169, 1392 (1968).
- Ba 71 J.P. BOISSON et C. GIGNOUX, Journal de Physique (à paraître).
- Br 69 D.D. BRAYSHAW, Phys. Rev. 182 (1969).
- Br 67 D.M. BRINK and E. BOEKER, Nucl. Phys. A 91 (1967), 1.
- Bu 65 S.T. BUTLER, Nature 1965, 207, 1346.
- Do 66 L.R. DODD and K.R. GREIDER, Phys. Rev. 1966, 146, 671.
- Fa 60 L.D. FADDEEV Zh EKSPERIM i Teor. Fiz 39 1459 (1960)
- Gi 71 C. GIGNOUX, Journal de Physique 7 (1971) 467.
- Ha 62 T. HAMADA and I.B. JOHNSTON, Nucl. Phys. 34 (1962) 382.
- He 65 J.R. HETHERINGTON and L.H. SCHICK, Phys. Rev. 137 B 935 (1965).
- Hu 61 J. HUMBLET and L. ROSENFELD, Nucl. Phys. 26 (1961) 529.
- Hu 68 J.W. HUMBERSTON, R.L. HALL and T.A. OSBORN, Phys. Letters 27 B (1968) 195.
- Ja 71 A.D. JACKSON, A. LANDE, P.U. SAUER, Phys. Letters 35 B (1971) 365.
- Ka 38 P.L. KAPUR and R. PEIERLS, Proc. Roy. Soc. A 166, 277 (1938).
- Kh 68 V.F. KHARCHENKO, N.M. PETROV and S.A. STOROZHENKO, Nucl. Phys. A.106 (1968) 464.
- Ki 69 Y.E. KIM, J. Math. Phys. 8, 1941 (1969).
- Ko 69 L.P. KOK - Thesis Groningen 1969.
- Ko 65 K.L. KOWALSKI, Phys. Rev. Letters 15 (1965) 798.
- Lo 64 C. LOVELACE, Phys. Rev. 135 (1964) B 1225.
- Ma 69 R.A. MALFLIET and J.A. TJON, Nucl. Phys. A 127 (1969) 161.
- Ma 70 R.A. MALFLIET and J.A. TJON, Ann. of Phys. 61 (1970) 425.

- Mi 62 A.N. MITRA, Nucl. Phys. 32, 529 (1962).
- Mi 70 T.A. MINELLI and F. ZARDI, Lettere Nuovo Cimento 1970, 3, 369.
- Mo 53 P.M. MORSE and H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics, Mc Graw Hill Book Comp. 1953 - New York.
- No 65 H.P. NOYES, Phys. Rev. Letters 15 (1965) 538.
- Os 67 T.A. OSBORN SLAC-79, UC-34 (thesis) Standford (1967).
- Re 68 R.V. REID, Ann. of Phys. 50 (1968) 411.
- Ro 66 E. ROST, Phys. Rev. 154 (1966) 994.
- Sh 66 P.E. SHANLEY, thesis 1966 Boston.
- Ta 64 M. TANIFUGI, Nucl. Phys. 1964, 58, 81.
- We 63 S. WEINBERG, Phys. Rev. 131 (1963) 440.
- Ya 54 Y. YAMAGUCHI, Phys. Rev. 1954, 95, 1628.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. YOCOZ qui, malgré mes connaissances en physique nucléaires limitées à une lecture estivale du livre de Reston, m'a accepté en physique théorique. Depuis il m'a initié à la physique nucléaire et m'a aidé tout au long de ce travail qu'il a dirigé.

Je remercie Monsieur le Professeur B. MALGRANGE qui m'a aidé à prendre contact avec la physique théorique et qui a bien voulu faire partie de ce jury.

Monsieur J. VALENTIN, Directeur de l'Institut des Sciences Nucléaires a su préserver les libertés des théoriciens. Il a accepté de présider ce jury et je lui en suis aussi reconnaissant.

Je remercie aussi le Docteur J. RAYNAL qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et faire partie du jury.

J'exprime toute ma gratitude aux chercheurs du groupe de physique théorique pour les discussions, critiques et aides de toutes sortes qu'ils m'ont apportées.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

le président de la thèse

Xalun

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

[Signature]

